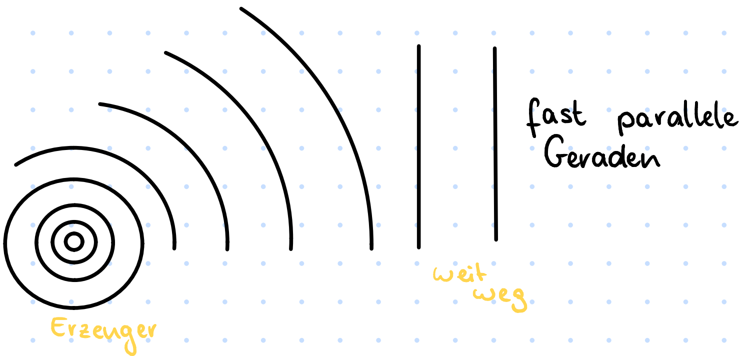
Quantenobjekte

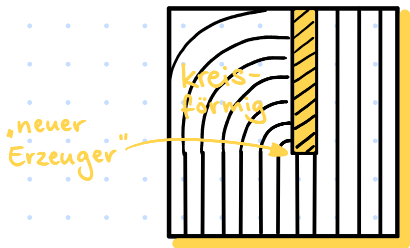
INHALTSANGAB

Wellenwanne

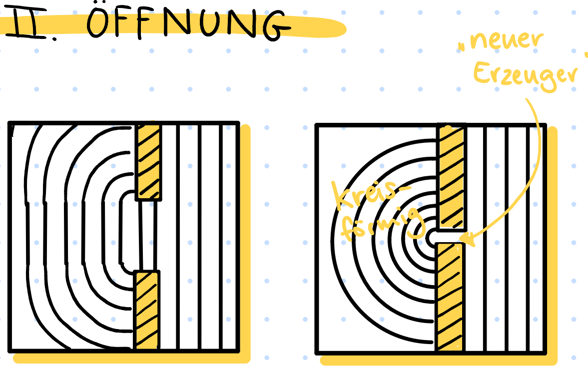


$c = \lambda \cdot f$

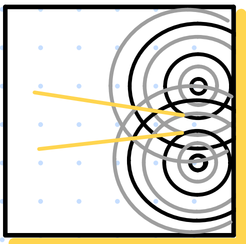
I. HINDERNIS

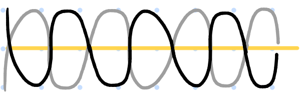


II. ÖFFNUNG



III. ZWEI ERZEUGER





Berg – Tal

löschen sich gegenseitig aus

HUYGENS'SCHES PRINZIP

Jede Punkt einer Wellenfront ist der Ausgangspunkt für eine neue Welle, einer Elementarwelle.

KONSTRUKTIVE INTERFERENZ

Auslenkung addieren - gleiches Vorzeichen

gleiche Amplitude => doppelte Auslenkung

Bedingung: $\Delta s = k \cdot \lambda$

GANGUNTERSCHIED

Wegdifferenz zweier oder mehrerer Wellen

DESTRUKTIVE INTERFERENZ

Auslenkung addieren - ungleiches Vorzeichen

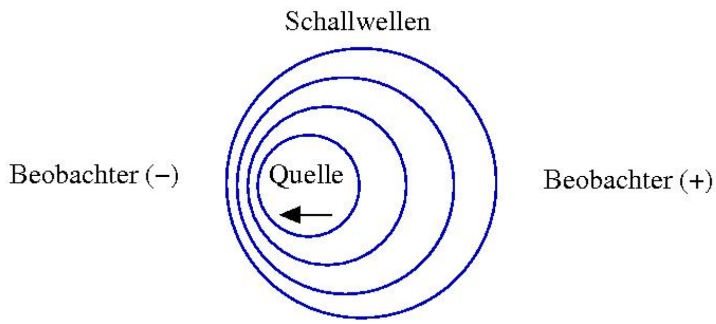
gleiche Amplitude => keine Auslenkung

Eine Quelle sendet akkustische Signale mit der Frequenz f und Wellenlänge λ aus, welche sich mit der Geschwindigkeit

$$c = \lambda f \tag{1}$$

von der Quelle ausbreiten. Bewegen sich Quelle und Beobachter mit einer Geschwindigkeit v relativ zu einander, so tritt der **Dopplereffekt** auf. Wichtig ist dabei, welche Bewegung relativ zum Medium in dem sich der Schall ausbreitet (Luft) erfolgt!

1. Bewegte Quelle / ruhender Beobachter.



Beobachter hört Schwingungen mit **veränderter Wellenlänge** $\widetilde{\lambda}$. Mit (1) folgt

$$\widetilde{\lambda} = \frac{c \pm v}{f} = \frac{c \pm v}{c}\lambda = \left(1 \pm \frac{v}{c}\right)\lambda$$

und damit:

$$\widetilde{f} = \frac{c}{\widetilde{\lambda}} = \frac{c}{\left(1 \pm \frac{v}{c}\right)\lambda} = \frac{1}{1 \pm \frac{v}{c}} \cdot f$$

Im Fall "−" nähern sich Quelle und Beobachter an, im Fall "+" entfernen sie sich von einander (siehe Abbildung). Bezeichnet v_q die Geschwindigkeit der Quelle, so gilt:

$$\widetilde{f} = \frac{f}{1 \mp \frac{v_q}{c}} \tag{2}$$

2. Ruhende Quelle / bewegter Beobachter.
Hier kommt der Dopplereffekt durch die veränderte Relativgeschwindigkeit $c \pm v$ zustande:

$$\overline{f} = \frac{c \pm v}{\lambda} = \frac{c \pm v}{c} f = \left(1 \pm \frac{v}{c}\right) f$$

Hier nähern sich Quelle und Beobachter im Fall "+" an, im Fall "−" entfernen sie sich von einander. Bezeichnet v_b die Geschwindigkeit des Beobachters, so gilt:

$$\overline{f} = \left(1 \pm \frac{v_b}{c}\right) f \tag{3}$$

3. Bewegte Quelle / bewegter Beobachter
Bewegen sich sowohl die Quelle (Geschwindigkeit v_q) als auch der Beobachter (Geschwindigkeit v_b) relativ zum Medium in dem sich die Schallwellen ausbreiten (Luft), dann ergibt die Kombination der Formeln (2) und (3):

$$\widehat{f} = \left(1 \pm \frac{v_b}{c}\right)\widetilde{f} = \frac{1 \pm \frac{v_b}{c}}{1 \mp \frac{v_q}{c}} \cdot f = \frac{c \pm v_b}{c \mp v_q} \cdot f$$

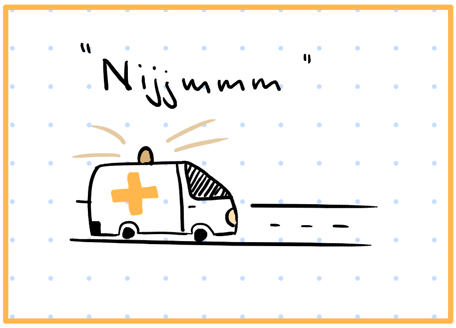
Das jeweils obere Vorzeichen gilt, wenn sich Quelle und Beobachter einander nähern, das jeweils untere wenn sie sich von einander entfernen.

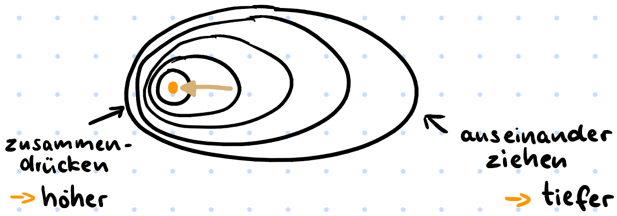
Aufgabe:
Der Hupton eines Autos hat die Frequenz $670Hz$. Der Wagen nähert sich einem ruhenden Beobachter mit der Geschwindigkeit $45\frac{km}{h}$. Mit welcher Frequenz hört der Beobachter den Ton?

DOPPLER EFFEKT

IM ALLTAG

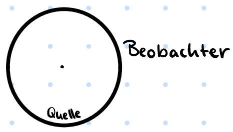
Wenn das Auto weit weg ist, ist der Ton höher und wenn es sich nähert wird er niedriger.



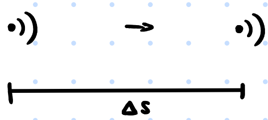


AUFGABE

Eine punktförmige Schallquelle mit der Frequenz 1600 Hz aussendet rotiert horizontal im Kreis auf 2m mit der Geschwindigkeit 3 Umdrehungen pro Sekunde.
Wie schwankt die Frequenz für den Beobachter ?

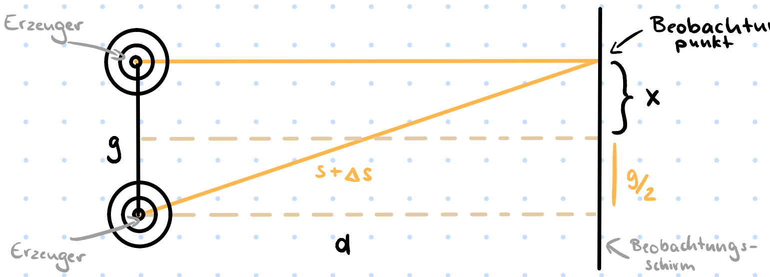


GANGUNTERSCHIED



Maximale Verstärkung : $\Delta s = k\lambda$ mit $k \in \mathbb{N}^0$ 0; 1; 2; 3; 4...

Maximale Auslöschung : $\Delta s = (k + \frac{1}{2})\lambda$ mit $k \in N$ 0,5; 1,5; 2,5...



$g \approx 5cm$ $d \approx 15cm$

bei $x_1 \approx 1{,}6cm$ erstes Minimum

bei $x_2 \approx 5cm$ zweites Minimum

Welche Wellenlänge haben die Wellen ?

$s^2 = (x - \frac{g}{2})^2 + d^2$ => $(s + \Delta s)^2 = (x + \frac{g}{2})^2 + d^2$

$\Delta s = \sqrt{(x + \frac{g}{2})^2 + d^2} - \sqrt{(x - \frac{g}{2})^2 + d^2}$

DOPPLER EFFEKT

Arbeitsblatt

verkürzte Wellenlänge: $\lambda - v \cdot T = \frac{c}{f} - \frac{v}{f} = \frac{c-v}{f}$

deswegen $\overline{\lambda} = \frac{c}{\overline{f}}$ gilt dann $\frac{c}{\overline{f}} = \frac{(c-v)}{f}$

$$\overline{f} = \frac{f}{c-v} \cdot c$$

$$\overline{f} = \frac{f}{c-v} \cdot c = \frac{670\,Hz}{340\,\frac{m}{s} - 12{,}5\,\frac{m}{s}} \cdot 340\,\frac{m}{s} \approx 695{,}57\,Hz$$

Punktförmige Schallquelle

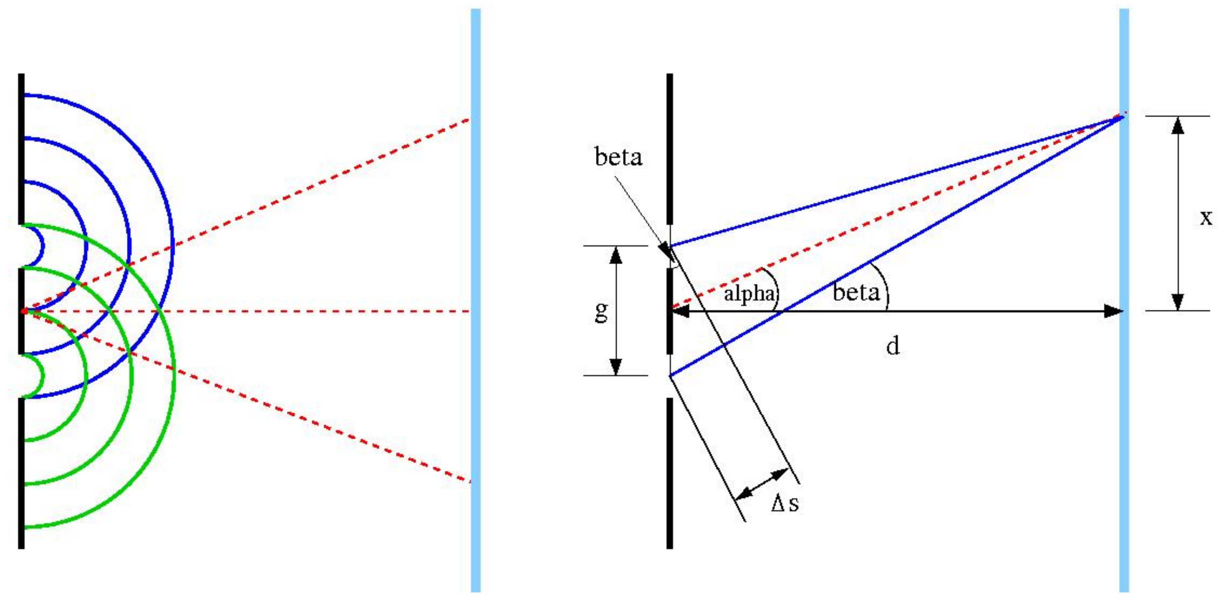
$$T = \frac{1\,s}{3}$$

$$v = \frac{2\pi \cdot 2\,m}{\frac{1\,s}{3}} = 12\pi\,\frac{m}{s}$$

$$\overline{f}_1 = \frac{1600\,Hz}{1 - \frac{12\pi\,\frac{m}{s}}{343\,\frac{m}{s}}} \approx 1797{,}6\,Hz$$

$$\overline{f}_2 = \frac{1600\,Hz}{1 + \frac{12\pi\,\frac{m}{s}}{343\,\frac{m}{s}}} \approx 1441{,}6\,Hz$$

Kohärentes, monochromatisches Licht (z.B. Laser) fällt durch einen Doppelspalt und erzeugt ein Interferenzmuster auf einem Projektionsschirm (Wand). Der Wegunterschied Δs zweier “Strahlen” (bzw Elementarwellen) erklärt die Interferenz, siehe Abbildung:



Geometrische Überlegungen ergeben die Formel: $\alpha \sim \beta$

$$\Delta s = \sqrt{d^2 + \left(x + \frac{g}{2}\right)^2} - \sqrt{d^2 + \left(x - \frac{g}{2}\right)^2}$$

Aus dem Abstand d von Doppelspalt und Projektionsschirm, dem Abstand der Spaltmitten g und der Distanz x_k von Haupt- und Nebenmaximum $k-$ter Ordnung [1] kann die Wellenlänge des Lichtes berechnet werden. Da hier x_k und g sehr klein im Vergleich zum Abstand d sind, lässt sich eine einfache Näherungs-Formel finden, welche in der Praxis gute Ergebnisse liefert.

1. **Aufgabe:**

   (a) Was lässt sich **näherungsweise** über die Lage der beiden Strahlen (von den Spalten zum Nebenmaximum) und über die Winkel α und β sagen?

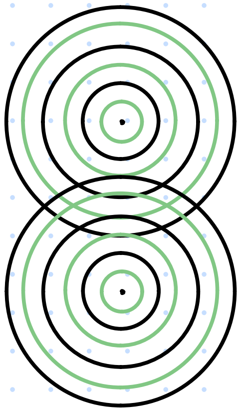
   (b) Leite eine Näherungs-Formel für die Lage der Maxima und Minima auf dem Schirm in Abhängigkeit des Winkels α her.

   (c) Leite eine Formel für die Abstände x_k der Maxima (und Minima) zur Mitte M des Interferenzmusters her.

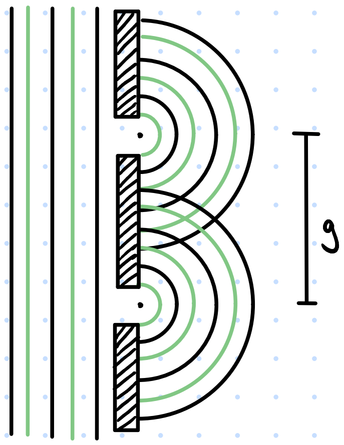
   (d) Berechne die Wellenlänge des Laserlichts aus den Daten des Experiments.

[1] Neben dem Hauptmaximum in der Mitte des Interferenzmusters befinden sich (symmetrisch auf beiden Seiten) die Nebenmaxima. Je nach Gangunterschied Δs ergeben sich Nebenmaxima erster Ordnung, zweiter Ordnung, usw. welche den Abstand x_k zum Hauptmaximum haben.

Doppelspalt



zwei Erzeuger



Doppelspalt

Eine ebene Welle trifft auf einen Doppelspalt,
hinter jedem der beiden Spalten breiten sich Kreiswellen aus,
es entsteht ein Interferenzmuster.
Dieses entspricht dem Muster zweier Erzeuger.
(Theorie vom Gangunterschied für g Spaltmitten)

DOPPELSPALT

1.

$$\Delta s = \sqrt{(x+\tfrac{g}{2})^2 + d^2} - \sqrt{(x-\tfrac{g}{2})^2 + d^2}$$

$$= \sqrt{(0{,}5cm + \tfrac{0{,}06cm}{2})^2 + (511cm)^2} - \sqrt{(0{,}5\,cm - \tfrac{0{,}06cm}{2})^2 + (511cm)^2}$$

$$\lambda = \frac{\Delta s}{k}$$

$\lambda_1 = 587nm$

$\lambda_2 = 705\,nm$

$\lambda_3 = 823\,nm$

$\lambda_4 = 880nm$

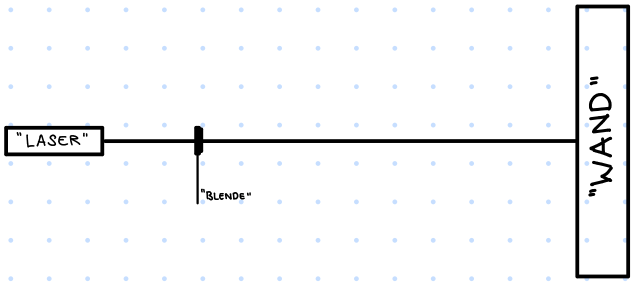
$\varnothing = 748{,}75nm$

=> Laser 632nm

2. $$\frac{\Delta s}{g} = \frac{x}{d}$$

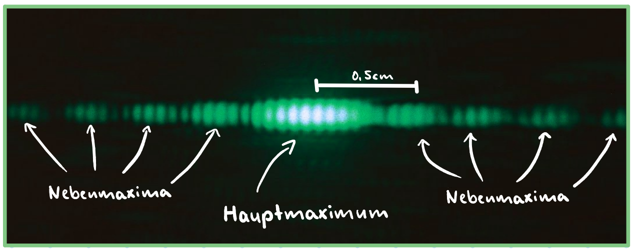
$$g = \frac{\Delta s \cdot d}{x} = \frac{6{,}32 \cdot 10^{-4} \cdot 700cm}{2{,}3cm} = 0{,}019cm$$

Doppelspalt-Experiment



Laserlicht fällt durch einen Doppelspalt auf einen Beobachtungsschirm, erkennt das für Wellen typische Interferenzmuster.

=> Licht hat Welleneigenschaften



$g = 0{,}6\,mm$

$d = 5{,}11\,m$

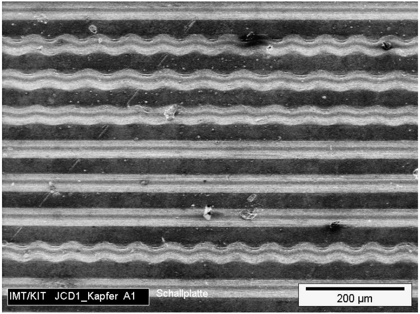
$x_1 = 0{,}5\,cm$
$x_2 = 1{,}2\,cm$
$x_3 = 2{,}1\,cm$
$x_4 = 3\,cm$

1. Wie groß ist die Wellenlänge?

2. Die Wellenlänge des Lasers ist 632,8nm. Der Abstand zwischen Schirm und Spalt beträgt $d = 7m$. Der Abstand des ersten Nebenmaxima zum Hauptmaximum beträgt $x_1 = 2{,}3\,cm$.
Wie groß ist der Doppelspalt?

Schallplatten und CD's

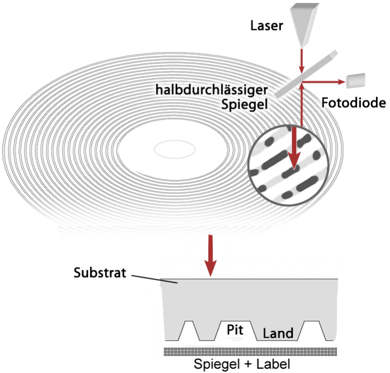
Dr. Günther



Bildquelle Wikipedia:

Links: Von Disques Vogue - https://de.wikipedia.org/w/index.php?curid=4437632

Prinzip der CD ähnlich:

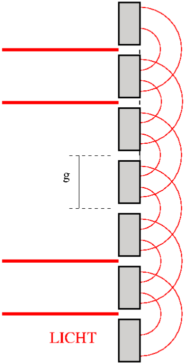


Quelle: Wikipedia

Wie groß sind die Rillen?

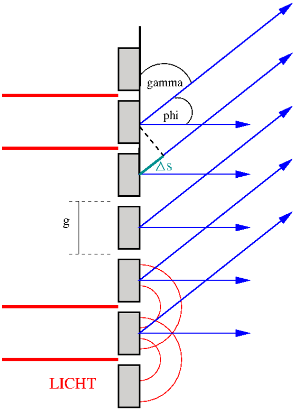
Optisches Gitter ermöglicht Messung!

Gitter besteht aus periodischen linienartige Strukturen, z.B. Drähte dicht nebeneinander (Frauenhofer 1820)

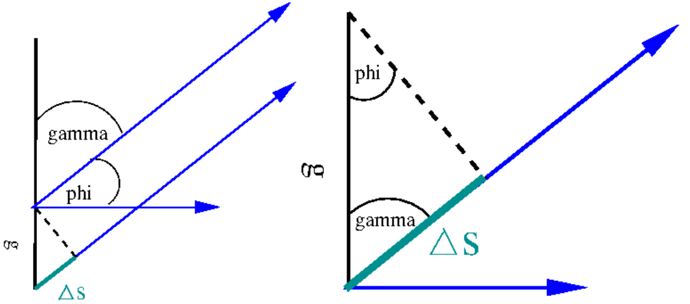


Gitterkonstante g ist die Periode des Gitters.

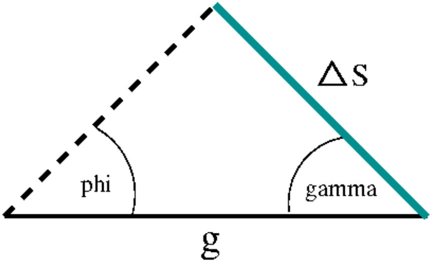
Hier: Winkel γ wird zum Gitter, Winkel ϕ zum Lot gemessen:



Dreieck mit Hypothenuse g und Kathete Δs:



Dreieck mit Hypothenuse g und Kathete Δs:



$$\sin \phi = \frac{\Delta s}{g}$$

oder alternativ: $\cos \gamma = \Delta s / g$

Maxima bei $\Delta s = k\lambda$ mit $k \in \mathbb{N}$

also: $\Delta s = \lambda,\ 2\lambda,\ 3\lambda,\ \ldots$

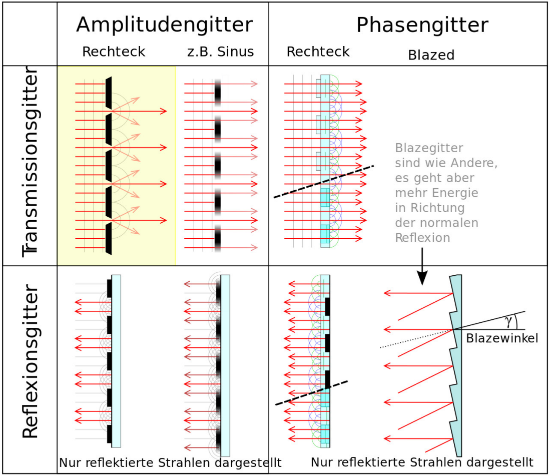
Maxima:

$$\boxed{k\lambda = g \sin\phi}$$

Alternativ wenn der Winkel zum Gitter gemessen wird:

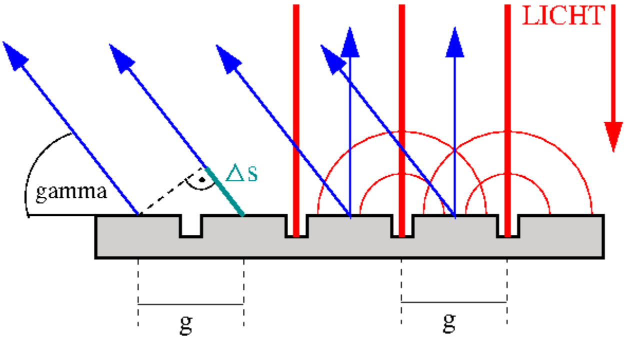
$$k\lambda = g\cos\gamma$$

Andere Gitter



Weitere Varianten möglich

Bildquelle: Wikipedia



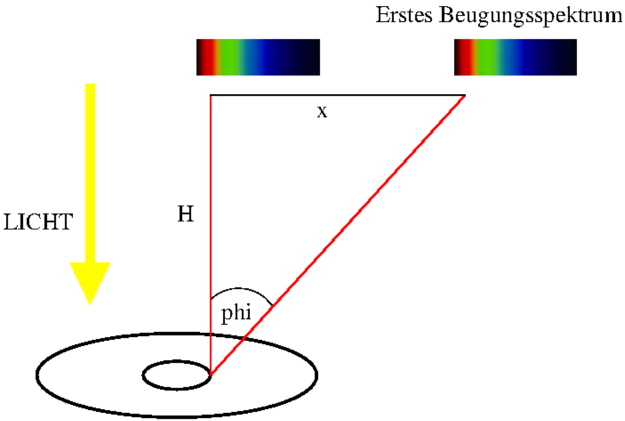
Periodische Strukturen (Stege und Lücken)

Benachbarte Elementarwellen interferieren

Analog: Maxima bei $k\lambda = g\cos\gamma$

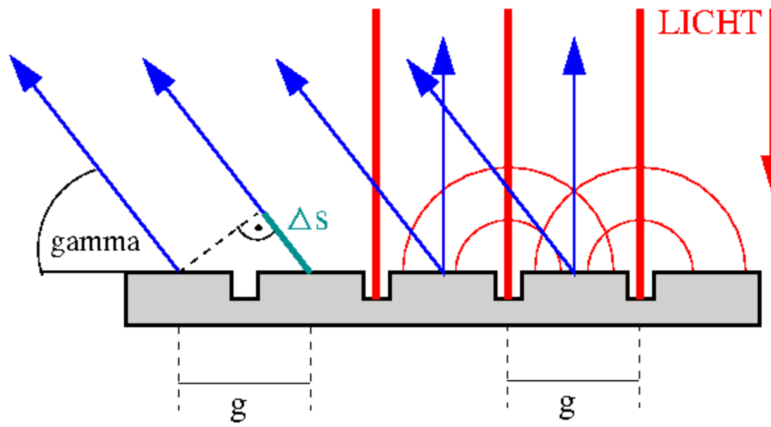
Für $\phi = 90° - \gamma$ bei $k\lambda = g\sin\phi$

Experiment



$$\phi = \arctan\left(\frac{x}{H}\right)$$

Die Oberfläche einer CD (Compact-Disc) enthält winzige Rillen, die ein Reflexionsgitter bilden. Das Licht eines Lasers fällt senkrecht auf die CD[1]:



1. Zwischen dem Abstand g benachbarter Rillen (jeweils zur Mitte der Rille gemessen), der Wellenlänge λ des Laserlichtes und des $k-$ten Interferenzmaximums, welches unter dem Winkel γ **zur Rillenebene** der CD auftritt, besteht der Zusammenhang

$$k\lambda = g\cos\gamma. \tag{1}$$

   Leite den Zusammenhang (1) her.

2. Welchen Abstand haben benachbarte Rillen einer CD, wenn das Laserlicht eine Wellenlänge von $632nm$ besitzt und das erste Interferenzmaximum unter einem Winkel von $\gamma = 72°$ zur Rillenebene der CD auftritt.

3. Der Rillenabstand bei einer DVD beträgt etwa $0,6\mu m$. Das Licht eines blauen Lasers der Wellenlänge $400nm$ wird senkrecht auf die DVD gerichtet.

   (a) Unter welchem Winkel γ tritt das erste Interferenzmaximum auf?

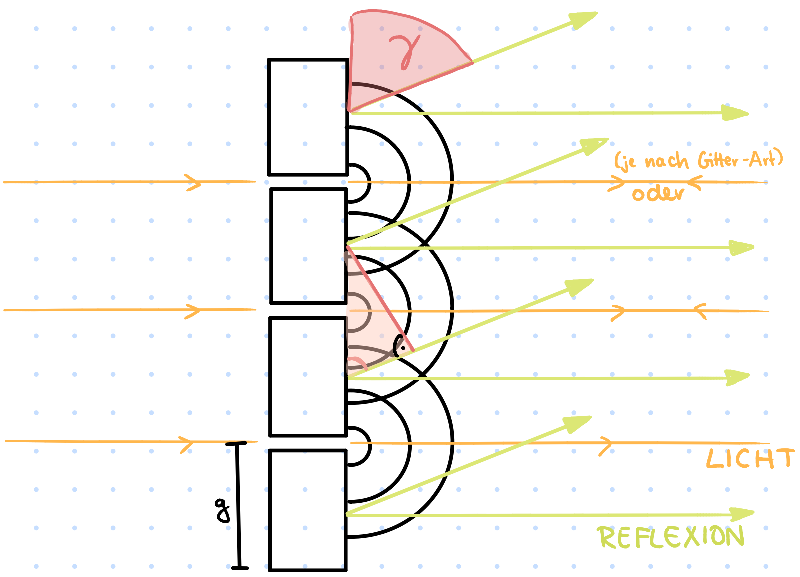
   (b) Warum gibt es bei der DVD keine Interferenzmaxima höherer Ordnung ($k = 2, 3, 4...$)?

4. Beweise allgemein, dass die Bedingung $k\lambda \leq g$ für das Auftreten des $k-$ten Interferenzmaximums erfüllt sein muss.

5. Verwendet man für das Experiment eine Blue-Ray-Disk, so kann man gar keine Interferenzmaxima beobachten. Begründe dies, und berechne eine obere Grenze für den Rillenabstand einer Blue-Ray-Disk. Die Wellenlänge des sichtbaren Lichtes ist etwa $400 - 800\,nm$.

[1] Die Pfeile in der Abbildung zeigen z.B. die Richtung zum $k-$ten Interferenzmaximum an. Es handelt sich **nicht** um reflektierte Strahlen!

optisches gitter



1

$$\Delta s = g \cdot \cos\gamma$$

$$k \cdot \lambda = g \cdot \cos\gamma$$

2

$$g = \frac{k \cdot \lambda}{\cos\gamma} = \frac{632 \cdot 10^{-9}\,m}{\cos(72)} \approx 2045\,nm$$

$$= 2{,}045\,\mu m$$

3a

$$\gamma = \arccos\left(\frac{k\lambda}{g}\right) = \arccos\left(\frac{400 \cdot 10^{-9}\,m}{0{,}6 \cdot 10^{-6}\,m}\right) = 48{,}19°$$

3b

$$\gamma = \arccos\left(\frac{k\lambda}{g}\right) = \arccos\left(\frac{k \cdot 400 \cdot 10^{-9}\,m}{0{,}6 \cdot 10^{-6}\,m}\right) \overset{\text{mit } k \geq 2}{=} \text{ERROR}$$

da Ankathete größer als Hypothenuse

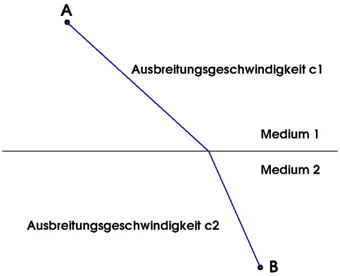
4

Damit arccos definiert ist, muss $\frac{k\lambda}{g} \leq 1$ also $k\lambda \leq g$ erfüllt sein.

5 Der Rillenabstand ist zu klein für sichtbares Licht

$\lambda \leq g$ also $g \leq 0{,}38\,\mu m$

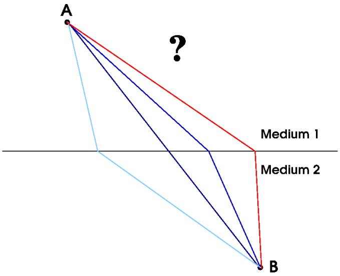
Licht läuft von Punkt A zu Punkt B:



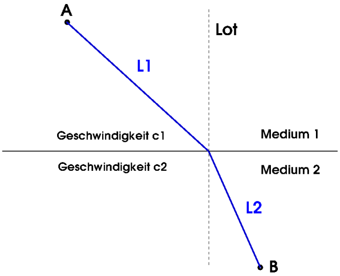
Der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten ist eine Gerade !

Licht wählt den schnellsten Weg !

Welches ist der schnellste Weg ?



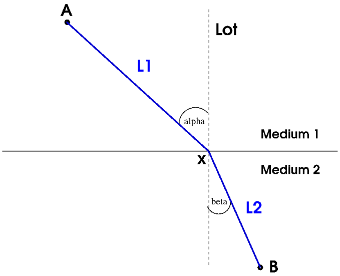
Betrachten wir einen Weg genauer:



Licht legt die Strecke L_j in Medium j zurück

Gesamtzeit $t = \frac{L_1}{c_1} + \frac{L_2}{c_2}$ minimal !

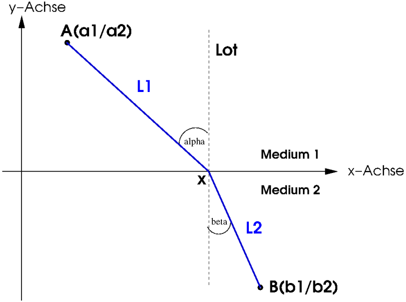
Einfallswinkel α und Ausfallswinkel β (zum Lot gemessen)



Licht legt die Strecke L_j in Medium j zurück

Gesamtzeit $t = \dfrac{L_1}{c_1} + \dfrac{L_2}{c_2}$ minimal !

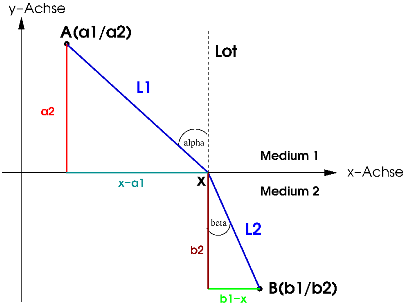
In einem Koordinatensystem:



Licht trifft auf das Medium an der Stelle x

Gesamtzeit $t = \dfrac{L_1}{c_1} + \dfrac{L_2}{c_2}$ minimal !

Wie lang sind die Strecken L_1 und L_2 ?



Pythagoras:

$$L_1 = \sqrt{a_2^2 + (x - a_1)^2} \quad \text{und} \quad L_2 = \sqrt{b_2^2 + (b_1 - x)^2}$$

Gesucht ist die kleinste Laufzeit $t = \frac{L_1}{c_1} + \frac{L_2}{c_2}$,

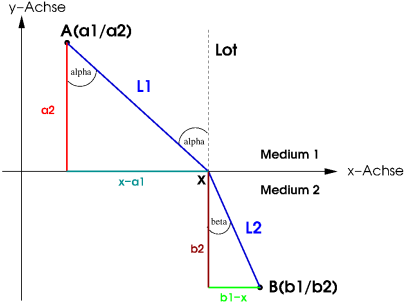
also ein **Minimum** der Funktion:

$$t(x) = \frac{\sqrt{a_2^2 + (x - a_1)^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{b_2^2 + (b_1 - x)^2}}{c_2}$$

Ableiten ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dx} &= \frac{x - a_1}{c_1 \sqrt{a_2^2 + (x - a_1)^2}} - \frac{b_1 - x}{c_2 \sqrt{b_2^2 + (b_1 - x)^2}} \\ &= \frac{x - a_1}{c_1 L_1} - \frac{b_1 - x}{c_2 L_2} \end{aligned}$$

Gleichung: $$0 = \frac{dt}{dx} = \frac{x - a_1}{c_1 L_1} - \frac{b_1 - x}{c_2 L_2}$$



$$\sin\alpha = \frac{x - a_1}{L_1} \quad \text{und} \quad \sin\beta = \frac{b_1 - x}{L_2}$$

Einsetzen ergibt

$$0 = \frac{dt}{dx} = \frac{x - a_1}{c_1 L_1} - \frac{b_1 - x}{c_2 L_2}$$
$$\frac{\sin\alpha}{c_1} - \frac{\sin\beta}{c_2}$$

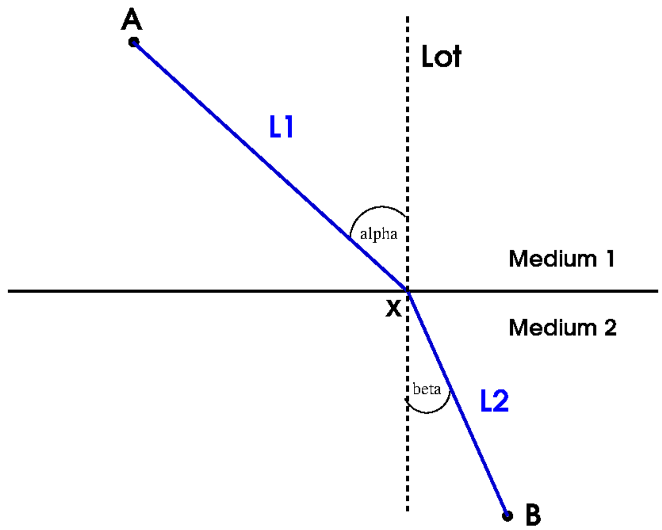
und damit:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c_2}$$

Nach Definition des Brechungsindex ist $c_k = c/n_k$, also folgt:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1}$$

Sei α der Einfallswinkel zwischen dem einfallenden Lichtstrahl L1 und dem Lot, welches senkrecht auf der Grenzfläche zwischen Medium 1 und Medium 2 steht. Der Ausfallswinkel zwischen dem gebrochenen Lichtstrahl L2 und dem Lot wird hier mit β bezeichnet:



Der zugehörige Winkel β soll jeweils im Experiment gemessen werden.
Wichtig: Der Lichtstrahl muss auf den Kreismittelpunkt des Halbzylinders ausgerichtet werden!

Experiment Teil 1: Übergang vom optisch dünneren ins optisch dichtere Medium

dünner → dichter

zum Lot hingebrochen; der Quotient von sin-Einfallswinkel und sin-Ausfallswinkel ist immer konstant konst. = $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$

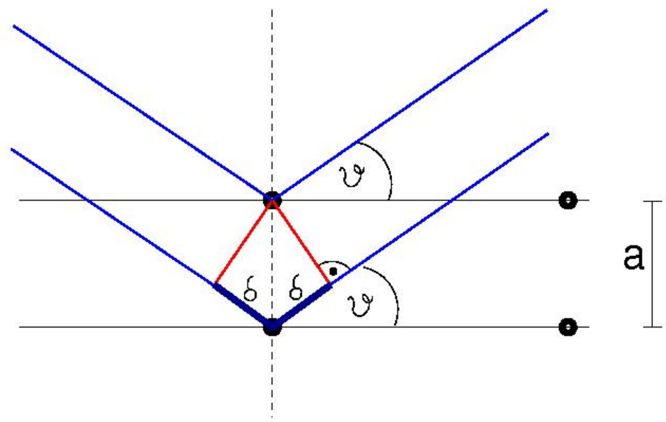
Experiment Teil 2: Übergang vom optisch dichteren ins optisch dünnere Medium

dichter → dünner

vom Lot weggebrochen; auch immer konstant; ab bestimmten Winkel tritt Totalreflexion auf

Beobachtung:

Röntgenstrahlung zeigt Interferenzeffekte bei Verwendung von geeigneten Kristallen als "Gitter". An jedem Atom enstehen Elementarwellen. Die Atome sind hier in regelmäßig in **Netzebenen** angeordnet:



Der Netzebenenabstand ist a, der Gangunterschied $\Delta s = 2\delta$, siehe Abbildung.

Offensichtlich gilt:

$$\sin\vartheta = \frac{GK}{HY} = \frac{\Delta s_1}{d}$$

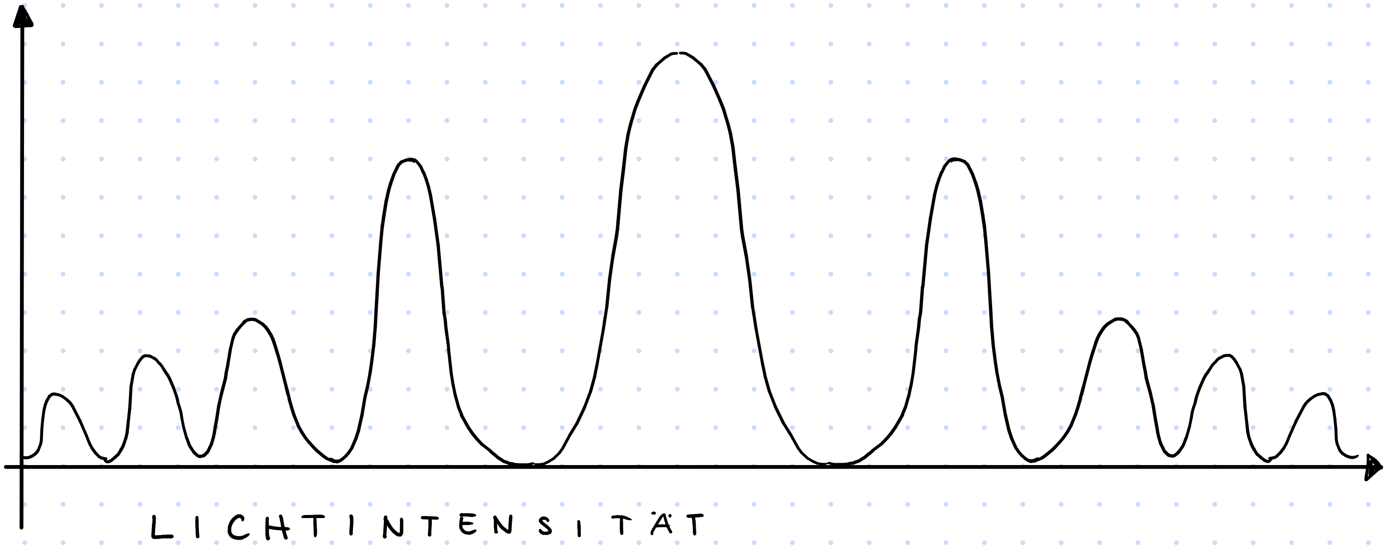
und damit:

$$\Delta s = 2 \cdot \Delta s_1$$

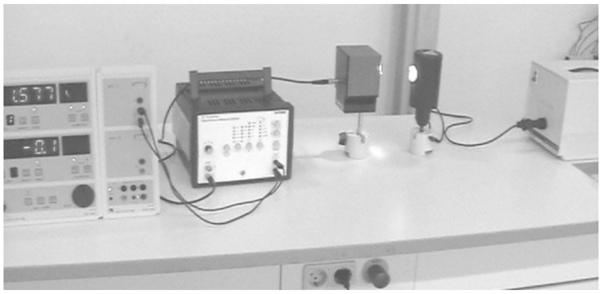
Intensitätsmaxima entstehen, wenn der Gangunterschied ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge λ ist. Das bedeutet für $k \in \mathbb{N}$ gilt:

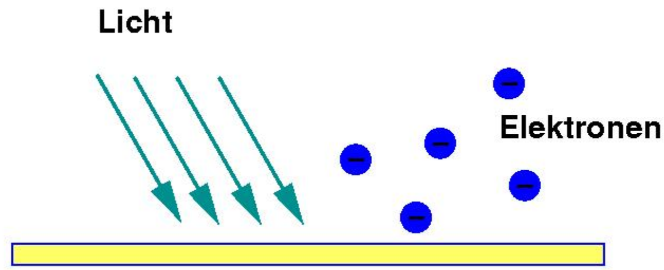
$$k\lambda = 2 \cdot d \cdot \sin(\delta)$$

EINZELSPALT



Der Photoeffekt (lichtelektrischer Effekt) ist eine Wechselwirkung elektromagnetischer Strahlung mit Materie. Wird eine negativ geladene Metalloberfläche (z.B. eine Zinkplatte) mit Licht geeigneter Wellenlänge bestrahlt, so werden Elektronen freigesetzt. Mit der Energie der Photonen muss die Austrittsarbeit (Bindungsenergie) der Elektronen verrichtet werden, der übrige Teil der Photonenenergie wird dabei in kinetische Energie der Elektronen umgewandelt.





Albert Einstein hat für die Erklärung[1] des lichteletrischen Effekts 1921 den Nobelpreis erhalten.

Theorie:
Bei der Gegenfeldmethode müssen die ausgelösten Elektronen mit ihrer kinetischen Energie ein elektisches (Gegen-) Feld mit der Spannung U überwinden.
Dazu ist die Energie E_{pot} = E_{kin} nötig. Für verschiedene Frequenzen f kann dann die Gegenspannung $U(f)$ gemessen werden, ab der keine Elektronen mehr das Feld überwinden. Für Photonenenergie E, Austrittsarbeit W_a und E_{pot} gilt der Zusammenhang[2]:

$$\boxed{e \cdot U(f) = E - W_a} \quad (1)$$

$E = W_a + E_{kin}$
$= W_a + E_{pot}$
$= W_a + eU$

Experiment:

1. In die Tabelle sollen die experimentellen Daten eingetragen werden:

λ	578 nm	546 nm	436 nm	405 nm	366nm	ohne
U	0,6V		1,2V	1,4V	1,7V	1,6V

2. Berechne jeweils eU und die Frequenz des Lichts (es gilt $c = \lambda f$):

f						
eU						

3. Stelle die Funktion $e \cdot U(f)$ graphisch dar. Die Frequenz f soll dabei auf der waagerechten Achse und eU auf der vertikalen Achse dargestellt werden.

4. Für die "Steigung" h der Funktion $e \cdot U(f)$ gilt offensichtlich:

$$h = \frac{e\Delta U}{\Delta f} = \frac{e(U_2 - U_1)}{f_2 - f_1}$$

Berechne h für mehrere Wertepaare und bestimme das arithmetische Mittel.

5. Welche physikalische Einheit besitzt h?

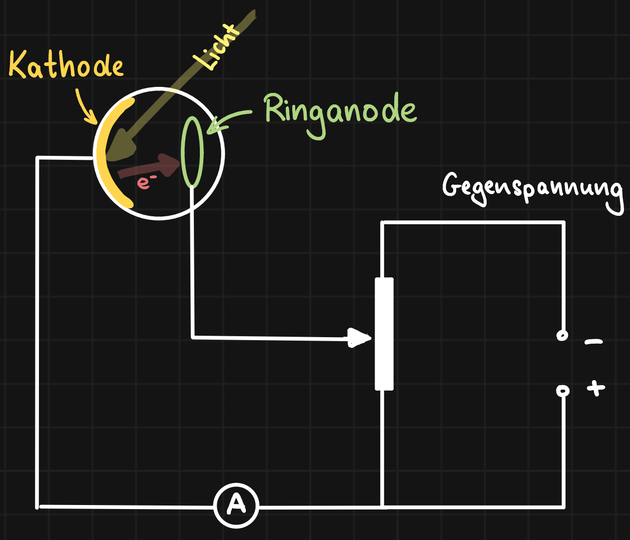
6. Für die Energie der Photonen gilt also die Formel $E = \frac{h \cdot c}{\lambda}$.

[1] A. Einstein: Ueber einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt, Annalen der Physik Vol 322, 6, 132–148, 1905
[2] Elementarladung: $e \approx 1{,}602 \cdot 10^{-19} C$

PHOTOEFFEKT

PHOTOEFFEKT

Der Photoeffekt beschreibt das Herauslösen von Elektronen aus einem Metall durch Photonen, also durch Bestrahlung mit Licht.

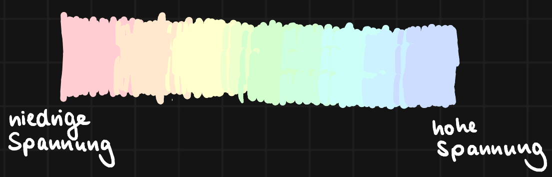


→ „Energie in Portionen" (gequantelt)

→ Wiederspruch zur klassischen Vorstellung von Licht als Wellen

→ Intensität des Lichts bestimmt durch Frequenz ; nicht Amplitude

Effekt tritt erst unterhalb einer bestimmten Wellenlänge (oberhalb einer bestimmten Frequenz)



Helleres Licht hat mehr Photonen, nicht aber Photonen mit höherer Energie.

Gegenfeldmethode

Bestimmung von h, dem Planck'schen Wirkungsquantum

$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 = Q \cdot U$$

$$v^2 = \sqrt{2U \cdot \frac{Q}{m}}$$

$$h \cdot f_1 = e \cdot U_1 + W_A \quad (1)$$

$$h \cdot f_2 = e \cdot U_2 + W_A \quad (2)$$

$$h \cdot f_1 - eU_1 = h \cdot f_2 - eU_2$$

$$h(f_1 - f_2) = e(U_1 - U_2)$$

$$h = \frac{e(U_1 - U_2)}{(f_1 - f_2)}$$

①

Straßen und öffentliche Plätze werden oft mit Natriumdampflampen beleuchtet, die ein orange-gelbes Licht aussenden. Eine Natriumdampflampe emittiert in guter Näherung monochromatisches Licht mit einer Wellenlänge von ca. 589 nm

a) Aus wie vielen Photonen besteht ein solcher Lichtblitz mit der Energie 10^{-16} Joule?

Energie pro Photon: $E_1 = h \cdot f = \frac{hc}{\lambda} = 3{,}375 \cdot 10^{-19} J$

Es folgt $N = \frac{E}{E_1} = 296{,}3$

b) Ein Photonendetektor wird in 10 7s von 10^{20} Photonen einer Natriumdampf getroffen. Welche Leistung empfängt der Detektor?

$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{33{,}75 J}{0{,}7 s} \approx 48{,}2 W$

c.) Wie viele Photonen emittiert die Natriumdampflampe pro Minute bei einer Leistung von 150 W.

$P = \frac{NE_1}{t} \Rightarrow N = \frac{P \cdot t}{E_1} = \frac{150 \frac{J}{s} \cdot 60 s}{3{,}375 \cdot 10^{-19} J} \approx 2{,}67 \cdot 10^{22}$

d) Welchen Impuls $p = \frac{h}{\lambda}$ haben die einzelnen Photonen der Natriumdampflampe? (Ergebnis in $60 \frac{g \cdot m}{s}$)

$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34} J \cdot s}{589 \cdot 10^{-9} m} \approx 1{,}12 \cdot 10^{-27} \frac{kg \cdot m}{s} = 1{,}12 \cdot 10^{-24} \frac{g \cdot m}{s}$

e) Das sichtbare Licht hat eine Wellenlänge zwischen 380 nm und 780 nm. Berechne die Energie der jeweiligen Photonen und gibt das Ergebnis in eV an.

$E_{blau} = \frac{hc}{380 nm} \approx 5{,}23 \cdot 10^{-19} J$ und $E_{rot} = \frac{hc}{780 nm} \approx 2{,}55 \cdot 10^{-19} J$

Es gilt $1 eV \approx 1{,}602 \cdot 10^{-19} AsV = 1{,}602 \cdot 10^{-19} J$ und damit folgt $E_{blau} = 3{,}27 eV$

und $E_{rot} = 1{,}59 eV$

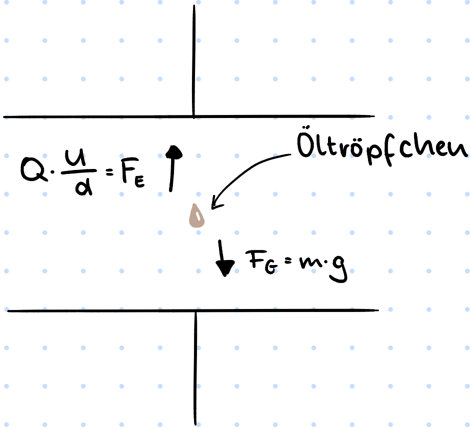
f.) Aus der für Photonen bekannten Proportionalität von Energie und Frequenz sowie der Beziehung zwischen Impuls und Wellenlänge folgt $e = pc$. Leite die Formel her.

$p = \frac{h}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{h}{p} \Rightarrow E = h \cdot f = \frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\frac{h}{p}} = pc$

millikanversuch

ROBERT
ANDRWS
MILLIKAN
(1868 –
1953)

NOBELPREIS 1923



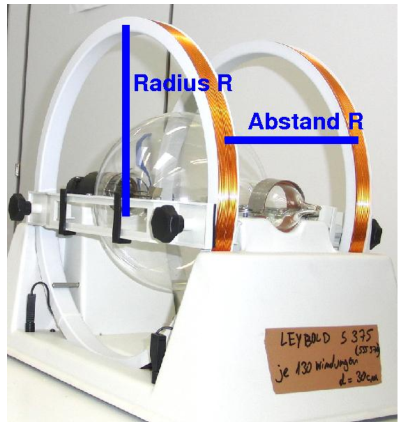
$$F_G = F_E$$

$$m \cdot g = Q \cdot \frac{U}{d}$$

$$\Rightarrow Q = \frac{m \cdot g \cdot d}{U}$$

Ein Plattenkondensator ist horizontal zum Erdboden ausgerichtet, mithilfe eines Zerstäubers werden Öltröpfche in diesen eingebracht. Durch anlegen verschiedener Spannungen an den Kondensator wirken unterschiedliche große elektrische Feldkräfte auf die geladenen Öltröpfchen, Rückschlüsse auf die Ladung der Tröpfchen möglich.

Experiment: Mit einer Fadenstrahlröhre in einem Helmholz-Spulenpaar soll die Masse des Elektrons bestimmt werden:



Sei I der Strom, N die Anzahl der Windungen je Spule und R der Radius sowie der Abstand der Spulen (siehe Abbildung) dann gilt für die magnetische Flussdichte B in der Mitte zwischen den Spulen:

$$B = \mu_0 \frac{8IN}{\sqrt{125} \cdot R} \tag{1}$$

Formel für die Berechnung der Masse m des Elektrons: (e =Ladung , v = Geschwindigkeit , r =Bahnradius) Das Elektron bewegt sich auf einer Kreisbahn. Durch Gleichsetzen von Zentripetalkraft und Lorenzkraft erhält man eine Gleichung für die Masse m. Quadrieren dieser Gleichung ergibt:

$$\boxed{m^2 = \left(\frac{Q \cdot B \cdot r}{v}\right)^2} \tag{2}$$

Aus den Formeln für kinetische und elektrische Energie lässt sich die Geschwindigkeit des Elektrons bestimmen. Für das Quadrat dieser Geschwindigkeit ergibt sich:

$$\boxed{v^2 = \frac{2Ue}{m_e}} \tag{3}$$

Wir setzten nun Gleichung (3) in Gleichung (2) ein. Erneutes Auflösen nach m ergibt:

$$\boxed{m = \frac{Q^2 \cdot B^2 \cdot r^2}{2Ue}} \tag{4}$$

Einsetzten von Gleichung (1) in Gleichung (4) ergibt:

$$\boxed{m = \quad}$$

Aufgaben zum Experiment:

1. Berechne die magnetische Flussdichte B in der Mitte zwischen zwei Helmholtz-Spulen mit dem Durchmesser $30cm$ und je 130 Windungen. Für Die Stromstärke I wurde gemessen: $I =$ 1,3A

2. Die Ladung des Elektrons ist $e \approx 1,602 \cdot 10^{-19}C$ und magnetische Feldkonstante $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2}$. Berechne die Masse des Elektrons aus den Daten des Experiments:

   Die Beschleunigungsspannung ist $U =$ 327 V, für den Bahnradius r des Elektrons wurde gemessen $r =$ 6 cm.

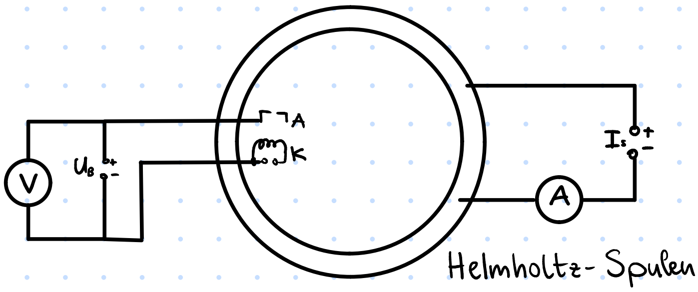
Fadenstrahlrohr

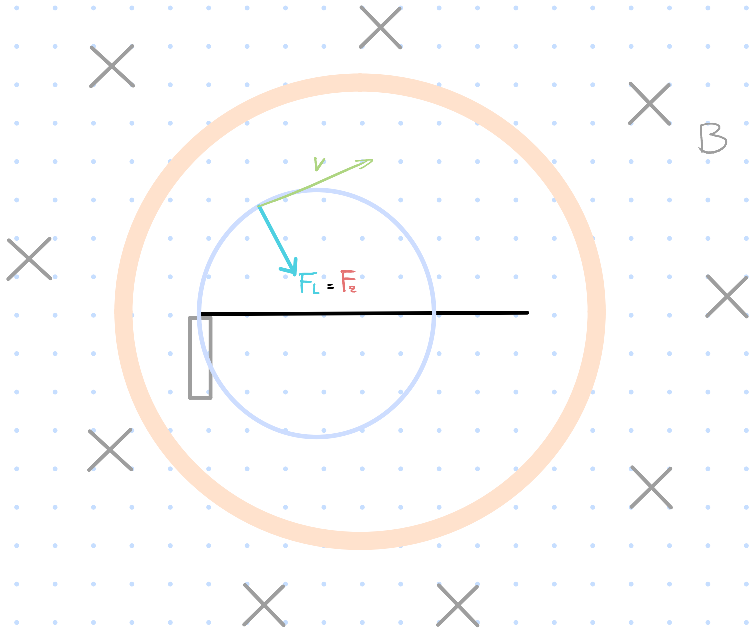
$$E_{pot} = E_{kin}$$

$$e \cdot U = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

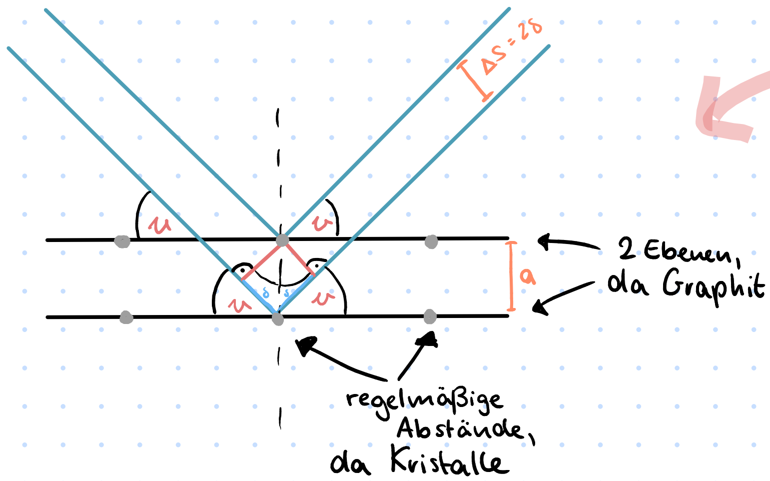
$$v^2 = \frac{2eU}{m}$$

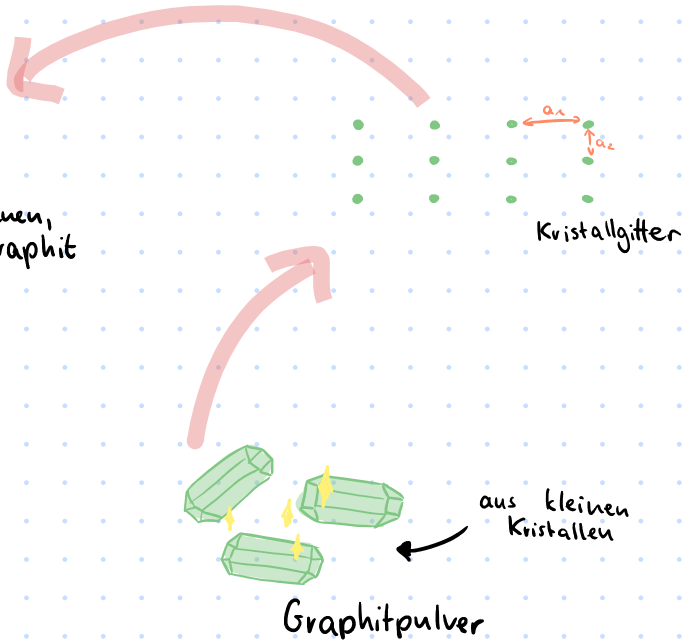
$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$$

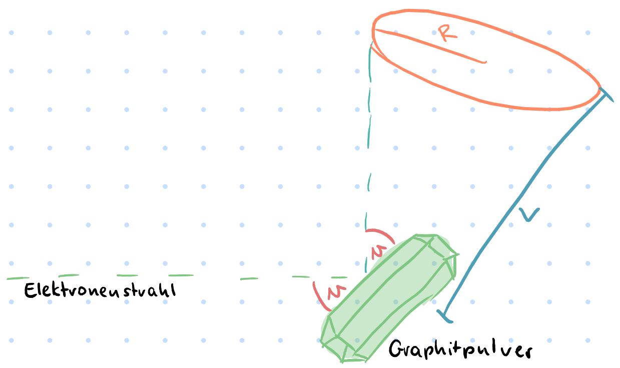


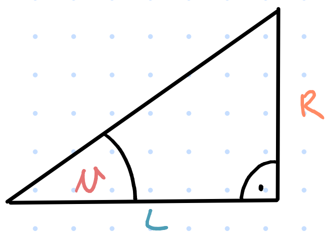


ELEKTRONENBEUGUNG









$\tan(2u) = \frac{R}{L}$

$\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{R}{L}\right)$

$k \cdot \lambda = 2a \cdot \sin(u)$

$k \cdot \lambda = 2a \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{R}{L}\right)$

$p \cdot \lambda = h$

Planck'sche Konstante

Ein Quantenobjekt läuft durch einen Spalt der Breite b. Sei x_M die Mitte eines Spaltes, dann kann man mit Sicherheit sagen, dass das Teilchen "an der Stelle"

$$x = x_M \pm \frac{b}{2}$$

durch den Spalt gelaufen ist. Die Ortsunschärfe kann hier als $\Delta x = \frac{b}{2}$ definiert werden. Jetzt verkleinert man den Spalt immer weiter um die Position genauer zu bestimmen. Aufgrund der Wellennatur treten Beugungseffekte auf. Je kleiner der Spalt, desto ausgedehnter das Interferenzmuster auf einem Beobachtungsschirm. Die Bewegungsrichtung (Richtungsvektor) des einzelnen Teilchens ist also beim Durchlaufen des Spalts ebenfalls nur mit einer gewissen Unschärfe bekannt. Durch die Beugung entsteht eine zusätzliche Impulsunschärfe Δp_x **in Richtung** Δx.

Heisenberg'sche Unschärferelation:

Es ist unmöglich Ort und Impuls eines Quantenobjektes gleichzeitig exakt zu bestimmen! Für **Ortsunschärfe** Δx und **Impulsunschärfe** Δp_x (im Folgenden einfach als Δp bezeichnet) gilt

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \tag{1}$$

wobei $\hbar := \dfrac{h}{2\pi} \approx 10^{-34} Js$ das **reduzierte Plancksche Wirkungsquantum**[1] ist.
Die Heisenberg'sche Unschärferelation lässt sich also auch schreiben als:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}$$

Die **Unschärfere ist prinzipieller Natur**! Sie resultiert aus den Wellencharakter der Materie.

Es verschiedene Möglichkeiten Δx zu definieren. Die Abschätzung in (1) ist abhängig von der Definition der Ortsunschärfe. Wird Δx als Spaltbreite definiert ($\Delta x = b$), so gilt z.B. $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar$.

Aufgaben:

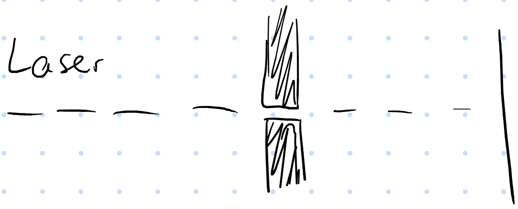
1. Der Ort eines Körpers der Masse $350g$ wird mit blauem Licht bis auf dessen Wellenlänge von $\lambda = 420nm$ genau ermittelt. Mit welcher Genauigkeit lässt sich die Geschwindigkeit v der Masse angeben?

2. Löse A1 für Fruchtfliege ($0,2\mu g$), Bakterie ($10^{-15}kg$) und DNA Molekül ($1,65 \cdot 10^{-21}kg$).

3. Ein Goldatom $m = 10^{-25}kg$ soll bis auf eine Unschärfe von $\Delta x = 10^{-10}m$ lokalisiert werden.

[1] Der Wert des **planckschen Wirkungsquantums** $h = 2\pi\hbar$ beträgt $h \approx 6,626 \cdot 10^{-34} Js$.

Heisenberg'sche Unschärferelation



$$\sin \omega = \frac{\Delta p}{p}$$

$$\sin \omega = \frac{\frac{B}{2}}{L}$$

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{\frac{B}{2}}{L}$$

$$p = \frac{h}{\lambda} \qquad \Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}$$

$$\left(\frac{\Delta p}{p} \cdot \lambda = \frac{B}{2 \cdot L} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{2L \cdot \lambda \cdot \Delta p}{h} \right)$$

$$p = \frac{4\pi \cdot \Delta x \cdot \Delta p}{\lambda}$$

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{\frac{B}{2}}{L}$$

$$\frac{\cancel{2} \cdot \cancel{\Delta p} \cdot L \cdot \lambda}{\cancel{4}_{2}\pi \cdot \Delta x \cdot \cancel{\Delta p}} = B$$

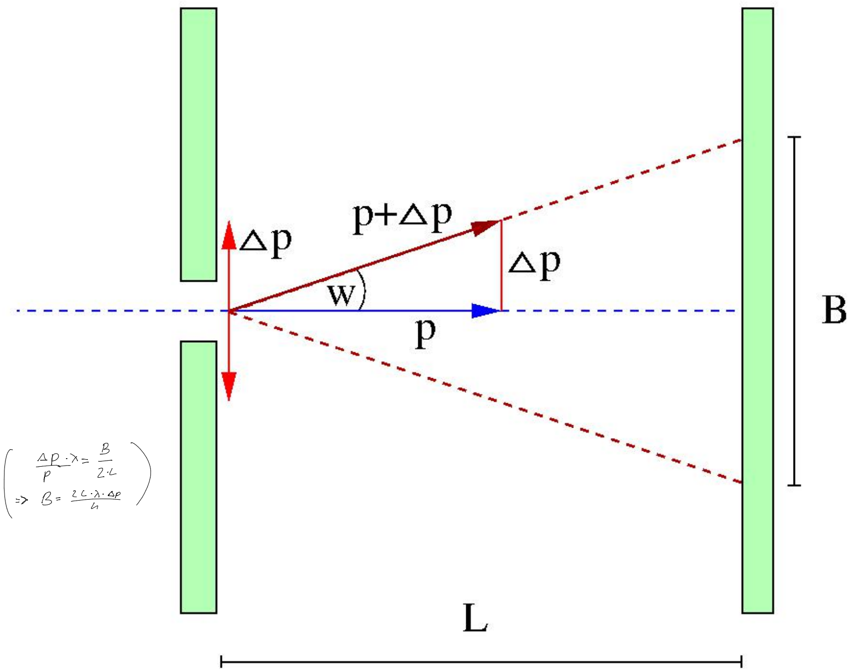
$$\boxed{\frac{L \cdot \lambda}{\pi \cdot 2\Delta x} \leq B}$$

$$\boxed{\frac{L \cdot \lambda}{\pi \cdot b} \leq B}$$

Licht mit dem Impuls

$$p = \frac{h}{\lambda} \tag{2}$$

fällt durch einen Spalt. Der Projektionsschirm hat die Entfernung L zum Spalt. Die Größen p und Δp sind hier Vektoren:



$p = \frac{h}{\lambda}$ $\quad \Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}$

$p = \frac{4\pi \cdot \Delta x \cdot \Delta p}{\lambda}$ $\quad \frac{\Delta p}{p} = \frac{\frac{B}{2}}{L}$

$\frac{\cancel{2} \cdot \cancel{\Delta p} \cdot L \cdot \lambda}{_2\cancel{4}\pi \cdot \Delta x \cdot \cancel{\Delta p}} = B$

$\boxed{\frac{L \cdot \lambda}{\pi \cdot 2\Delta x} \leq B}$

$\boxed{\frac{L \cdot \lambda}{\pi \cdot b} \leq B}$

$\left(\frac{\Delta p}{p} \cdot \lambda = \frac{B}{2 \cdot L} \quad \Rightarrow B = \frac{2L \cdot \lambda \cdot \Delta p}{h} \right)$

$\sin w = \frac{\Delta p}{p}$

$\sin w = \frac{\frac{B}{2}}{L}$

In dem Dreieck mit Winkel w, Ankathete p und Gegenkathete Δp gilt $\frac{\Delta p}{p} = \frac{\frac{B}{2}}{L}$.
Analog stellt der Abstand L die Ankathete bezüglich des Winkels w in einem anderen Dreieck in der Abbildung dar. Durch Gleichsetzen der beiden Formeln erhält man[2]:

Verwendet man nun Gleichung (2) und die Heisenberg'sche Unschärferelation[3], so lässt sich eine Abschätzung für die minimale Breite B des Interfenzmusters in Abhängigkeit der Spaltbreite $2\Delta x$ angeben. Es ist:

[2]Dises Resultat erhält man auch direkt mit den Strahlensätzen.

[3]$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}$, siehe Gleichung (1)

HEISENBERG'SCHE UNSCHÄRFERELATION

① Nach unserer Definition gilt $\Delta x = \frac{\lambda}{2}$. Mit $p = m \cdot v$ folgt $\Delta p = m \Delta v$.

Gleichung (1) liefert:

$$\Delta x \cdot \Delta p = \Delta x \cdot m \, \Delta v \geq \frac{\hbar}{2}$$

also

$$\Delta v \geq \frac{\hbar}{2m\Delta x} = \frac{h}{4\pi m \Delta x} = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}\,Js}{4\pi \cdot 0{,}35\,kg \cdot 210 \cdot 10^{-9}\,m} = 7{,}2 \cdot 10^{-28}\,\frac{m}{s}$$

$$\frac{kg \cdot (\frac{m}{s})^2 \cdot s}{kg \cdot m}$$

②

Fruchtfliege $\quad \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}\,Js}{4\pi \cdot 0{,}2 \cdot 10^{-6}\,kg \cdot 210 \cdot 10^{-9}\,m} \approx 1{,}3 \cdot 10^{-18}\,\frac{m}{s}$

Bakterie $\quad \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}\,Js}{4\pi \cdot 10^{-15} \cdot 210 \cdot 10^{-9}\,m} \approx 2{,}5 \cdot 10^{-13}\,\frac{m}{s}$

DNA-Molekül $\quad \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}\,Js}{4\pi \cdot 1{,}65 \cdot 10^{-21}\,kg \cdot 210 \cdot 10^{-9}\,m} \approx 1{,}5 \cdot 10^{-7}\,\frac{m}{s} = 0{,}15\,\frac{\mu m}{s}$

Unschärferelation spielt im Alltag keine Rolle!

③

$$\frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}\,Js}{4\pi \cdot 10^{-25}\,kg \cdot 10^{-10}\,m} \approx 5{,}27\,\frac{m}{s}$$

$\boxed{\text{Radiale Unschärfe Modell von Bohr + Heisenberg}}$

$\frac{r}{2} \pm \frac{r}{2}$

$\frac{r}{2} \pm \Delta r \qquad \Delta r \, \Delta p_r \geq \frac{h}{4\pi} \qquad r \sim 5 \cdot 10^{-11}\,m$

$\Delta r \, m_e \, \Delta v_r \geq \frac{h}{4\pi}$

ΔE in eV

$E = \frac{1}{2} m \cdot v^2$

15 eV ?

Jonas ist toll

Video zum Experiment: Buch S. 60

https://videoportal.uni-freiburg.de/category/video/Elektronenbeugung/1aa41fa486a9c1f1f693fccd55dbf694/81

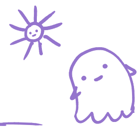
"In der Röhre werden Elektronen von einer Glühkathode emittiert, über ein elektronenoptisches System beschleunigt und durchdringen dann eine dünne Folie aus polykristallinem Graphit." (siehe Videobeschreibung)

1. **Aufgabe:**

   (a) Erkläre den physikalischen Effekt aus dem Experiment.

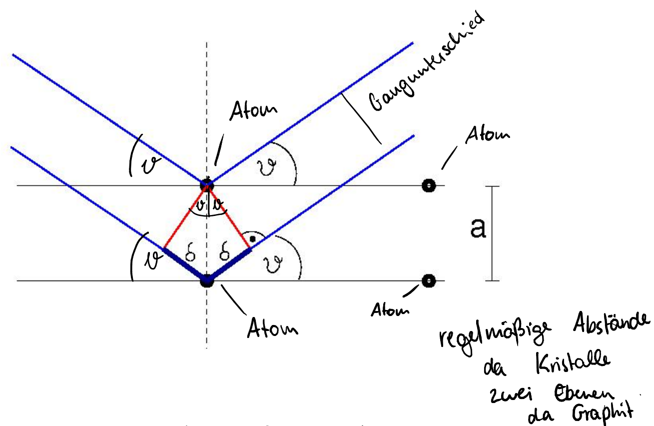
   Elektronen verhalten sich wie Wellen

   (b) Leite die Bragg-Bedingung her:



r /cm	1,25	1,2	1,3
R /cm	2,1	2	2,4
U/kV	4,5	5	4

d≈ 13cm



Der Netzebenenabstand ist a, der Gangunterschied $\Delta s = 2\delta$, siehe Abbildung.

Offensichtlich gilt:

$$\boxed{\sin\vartheta = \frac{GK}{HY} = \frac{\delta}{a}}$$

und damit:

$$\boxed{\Delta s = 2\delta = 2a \cdot \sin\vartheta}$$

c)

Intensitätsmaxima entstehen, wenn der Gangunterschied ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge λ ist. Das bedeutet für $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\boxed{k\lambda = 2 \cdot a \cdot \sin(\delta)}$$

(1) $\delta = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{R}{d}\right)$

$k \cdot \lambda = 2 \cdot d \cdot \sin(\delta) \quad | : k$

$\lambda = \frac{1}{k} \cdot 2 \cdot d \cdot \sin(\delta)$

einsetzen von (1)

$\lambda = \frac{1}{k} \cdot 2 \cdot d \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{R}{d}\right)\right)$

   (c) Sei d der Abstand von Kristall und Leuchtschirm (im Experiment 13,5cm), R der Radius des Beugungsringes und $k \in \mathbb{N}$ die Ordnung der Intensitätsmaxima. Leite aus geometrischen Betrachtungen der Anordnung die folgende Formel für die Wellenlänge her:

$$\lambda = \frac{1}{k} \cdot 2d \sin\left(\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{R}{d}\right)\right)$$

auf der nächsten Seite

   (d) Leite aus der Energiebetrachtung die folgende Formel für die Wellenlänge her:

d)

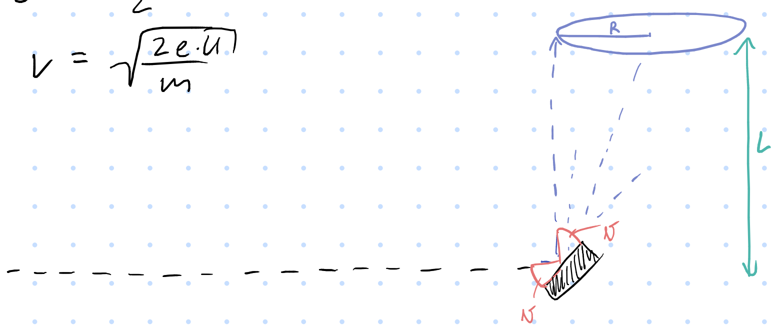
$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m \cdot v} = m \cdot \frac{h}{\sqrt{\frac{2E_{kin}}{m}}} = \frac{h}{\sqrt{2m \cdot E_{kin}}} = \frac{h}{\sqrt{2m \cdot e \cdot U}}$$

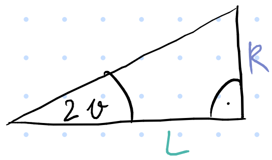
$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2eUm}}$$

Elektronenbeugung

$e \cdot U = \frac{1}{2} m \cdot v^2$

$v = \sqrt{\frac{2e \cdot U}{m}}$

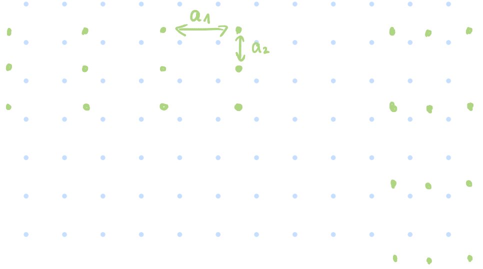




$\tan(2\vartheta) = \frac{R}{L}$

$\downarrow$

$\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{R}{L}\right)$



a bestimmen, wenn λ gegeben

$k \cdot \lambda = 2a \cdot \sin(\vartheta)$

$k \cdot \lambda = 2a \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{R}{L}\right)\right)$

Wellenlänge berechnen $(k=1)$

BEISPIEL

$L = 135\,mm$

$a_1 = 123\,pm$ (picometer) $= 1{,}23 \cdot 10^{-10}\,m$

$a_2 = 213\,pm = 2{,}13 \cdot 10^{-10}\,m$

$R_1 = 2{,}9\,cm = 0{,}029\,m$

$R_2 = 4{,}9\,cm = 0{,}049\,m$

$\lambda = 2 \cdot a_1 \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{R_2}{L}\right)\right)$

$\lambda = 2 \cdot 1{,}23 \times 10^{-10}\,m \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{0{,}049\,m}{0{,}135\,m}\right)\right)$

$\approx 4{,}26 \cdot 10^{-11}\,m \approx 42{,}6\,pm \approx 40\,pm$

$\lambda = 2 \cdot a_2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{R_1}{L}\right)\right)$

$\lambda = 2 \cdot 2{,}13 \times 10^{-10}\,m \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{0{,}029\,m}{0{,}135\,m}\right)\right)$

$\approx 4{,}5 \cdot 10^{-11}\,m \approx 45\,pm$

$$\left.\begin{array}{l} e\cdot U = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \\ v = \sqrt{\frac{2e\cdot U}{m}} \end{array}\right\} \quad p = m\cdot v \qquad p = \sqrt{2e\cdot U\cdot m}$$

$m = 9{,}109 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$

λ	...	...	...
p	...	...	...
$p\cdot\lambda$			

$\approx 6{,}6 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}$ ↖ Planck'sche Konstante h

$$\boxed{p\cdot\lambda = h}$$

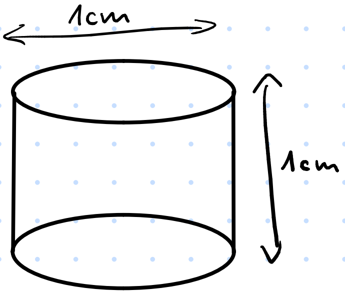
$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2e\cdot U m}}$$

r /cm	1,25	1,2	1,3
R /cm	2,1	2	2,4
U/kV	4,5	5	4

λ_r	$\sim 2{,}04\cdot 10^{-11}$	$\sim 1{,}96\cdot 10^{-11}$	$\sim 2{,}12\cdot 10^{-11}$
λ_R	$\sim 1{,}97\cdot 10^{-11}$	$\sim 1{,}88\cdot 10^{-11}$	$\sim 2{,}24\cdot 10^{-11}$

$p_{U_1} = 3{,}62\cdot 10^{-23}\,\mathrm{Ns}$ $\quad p_{U_2} = 3{,}82\cdot 10^{-23}\,\mathrm{Ns}$ $\quad p_{U_3} = 3{,}4\cdot 10^{-23}\,\mathrm{Ns}$

	p_{U_1}	p_{U_2}	p_{U_3}
λ_r	$\sim 6{,}97\cdot 10^{-34}$	$\sim 7{,}49\cdot 10^{-34}$	$\sim 7{,}21\cdot 10^{-34}$
λ_R	$\sim 6{,}73\cdot 10^{-34}$	$\sim 7{,}18\cdot 10^{-34}$	$\sim 7{,}62\cdot 10^{-34}$



$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

$\rho = 2 \cdot 10^{17} \frac{kg}{m^3}$

$V = \pi \cdot (5 \cdot 10^{-3} m)^2 \cdot 10^{-2} m$

$= 7{,}85 \cdot 10^{-7} m^3$

$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V = 2 \cdot 10^{12} \frac{kg}{m^3} \cdot 7{,}85 \cdot 10^{-7} m^3$

$\approx 1{,}57 \cdot 10^{11} hg$

Quantenobjekte werden durch die Schrödingergleichung beschrieben! Lösungen dieser Differentialgleichungen werden meist mit $\Psi(t, x, y, z)$ bezeichnet. Dabei ist Ψ eine Wellenfunktion, deren Betragsquadrat $|\Psi|^2$ die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte eines Quantenobjekts beschreibt. Wenn die Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Quantenobjekts an einem Ort **nicht** von der Zeit abhängt, lässt sich die Situation durch die **stationäre** Schrödingergleichung $\Delta\Psi + 2m\hbar^{-2}(E - V)\Psi = 0$ beschreiben wobei $\hbar = h/(2\pi)$. Wenn sich das Quantenobjekt zusätzlich nur in einer Dimension bewegt, erfüllt seine Wellenfunktion die **eindimensionale, stationäre** Schrödingergleichung:

$$\Psi''(x) + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E - V(x))\Psi(x) = 0 \tag{1}$$

Das Teilchen hat dabei die Masse m und bewegt sich im Potential $V(x)$. Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit P im Intervall $[a; b]$ ist durch das Integral über die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$P = \int_a^b |\Psi(x)|^2 \, dx \tag{2}$$

Betragstriche für komplexe Lösung

gegeben. (Die Wahrscheinlichkeitsdichte muss "normierbar" sein).

1. **Aufgabe:**
   Wir betrachten ein Teilchen im Potentialtopf

   $$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < x < L \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

   (a) Seien A, B konstant. Bestimme die Konstante k so, dass $\Psi_s = A\sin(kx)$ für $0 < x < L$ die Schrödingergleichung (1) erfüllt. Beweise, dass für dieses k dann auch $\Psi_c = B\cos(kx)$ und die Summe $\Psi = \Psi_s + \Psi_c$ Lösungen sind.

   (b) Da sich **außerhalb** des Bereiches $0 < x < L$ eine unendlich hohe Potentialbarriere befindet, muss dort offenbar $\Psi = 0$ sein. Die Wellenfunktion Ψ soll überall stetig sein. Was folgt aus den Randbedingungen bei $x = 0$ und $x = L$ für die Konstante B und für die Energie E?

   (c) Da sich das Teilchen irgendwo aufhalten muss, ist die durch (2) gegebene Aufenthaltswahrscheinlichkeit P für den gesamten Aufenthaltsbereich des Teilchens offensichtlich Eins. Bestimme mit dieser Normierungsbedingung die Konstante A. Die folgende Stammfunktion darf ohne Beweis benutzt werden:

   $$\int \sin^2(kx)\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4k}\sin(2kx) \tag{3}$$

   (d) Gib die Funktion Ψ in Abhängigkeit der Potentialtopflänge L und der Quantenzahl n an.

2. **Aufgabe:**
   Wir betrachten ein Modell mit einem Teilchen, welches sich **nur** im Intervall $I = [0, 2]$ aufhalten kann. Es soll dort durch $\Psi(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ beschrieben werden.

   (a) Skizziere die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x) = |\Psi(x)|^2$.

   (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich das Teilchen in der "linken Hälfte" des Intervalls ?

   (c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich das Teilchen im Bereich $[0; 0,2]$ bzw. in $[0,9; 1,1]$?

   (d) Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich das Teilchen irgendwo im Intervall befindet.

3. **Aufgabe:**
   Für radialsymmetrische Funktionen $f(r) = f\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$ gilt $\Delta f(r) = f''(r) + \frac{2}{r}f'(r)$. Bei einem sehr vereinfachten Modell[1] mit Coulombpotential ergibt sich damit für den radialen Anteil $f(r)$ der Wellenfunktion Ψ die Differentialgleichung:

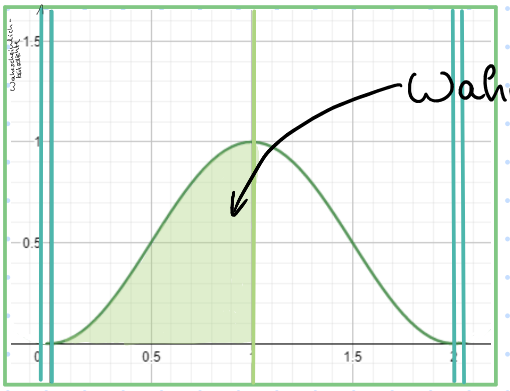
   $$f''(r) + \frac{2}{r}f'(r) + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left(E + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)f(r) = 0 \tag{4}$$

   Seien A und a konstant. Beweise, dass $f(r) = Ae^{-\frac{r}{a}}$ bei geeigneter Energie E eine Lösung von (4) ist. Was ergibt sich für a und für die Energie E? Vergleiche E mit den Energien im Bohr'schen Atommodell.

[1] Es handelt sich hier noch nicht um ein vollständiges Atommodell. Das quantenmechanische Modell für das Wasserstoffatom ist deutlich komplizierter. Selbst die entsprechende Differentialgleichung für den radialen Lösungsanteil enthält in der Klammer noch einen zusätzlichen Term $-\hbar l(l+1)r^{-2}$ mit der Bahndrehimpulsquantenzahl l. Im Grundzustand $n = 1$ ist allerdings $l = 0$, wodurch dieser Term entfällt.

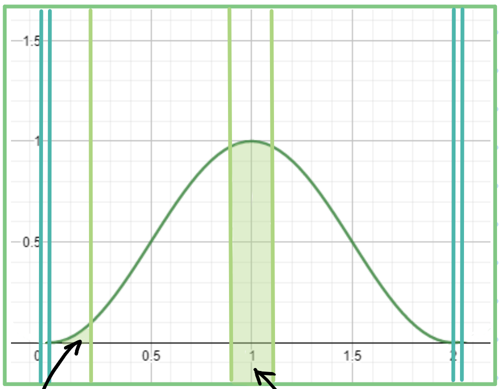
Aufgabe 2

a)



Wahrscheinlichkeit linke Hälfte: 50%

b) + c)



0,65%

19,84%

d)

$$F(x) = \frac{x}{2} - \frac{\sin(\pi x)}{2\pi}$$

$$\int_0^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 1$$

Das Teilchen ist zu 100% innerhalb des Intervalls.

Aufgabe 3

A und a konstant

$$f''(r) + \frac{2}{r} f'(r) + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left(E + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right) f(r) = 0$$

$$f(r) = A e^{-\frac{r}{a}}$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-\frac{r}{a}} \approx 1{,}47 \cdot 10^{15} e^{-\frac{r}{5{,}29 \cdot 10^{-11} m}} m^{-\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow E_n = \frac{13{,}6\,eV}{n^2} \quad \text{mit} \quad n = 1,2,3,\dots$$

-> stimmt mit Bohr'schen Theorie überein