Relativität von Raum und Zeit

SPEZIELLE RELATIVITÄTSTHEORIE

KONSTANZ DER LICHTGESCHWINDIGKEIT

RELATIVITÄTSPRINZIP

- kein bevorzugtes Bezugssystem (→ kein Lichtäther)
- Bewegung von Körpern nur relativ zu anderen Körpern

Inertialsystem:

Bezugssystem in dem das Trägheitsgesetz gilt

Drehende oder beschleunigte Systeme sind keine Inertialsysteme

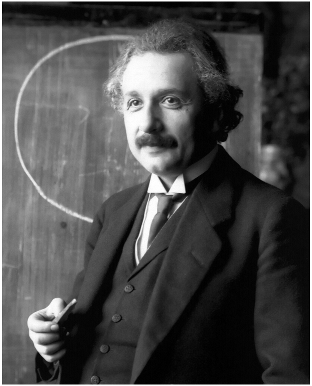


Bild: Wikipedia

Albert Einstein

1. Ätherhypothese
2. Postulate der SRT
3. Inertialsysteme in Bewegung
4. Kausalität
5. Lorentztransformation

Teil 1:

Ätherhypothese

Wasserwellen oder Schallwellen benötigen Medium zur Ausbreitung

Gibt es ein Medium für Lichtwellen?

Lichtäther wird im 17. Jahrhundert postuliert,

dieser soll Materie und den leeren Raum des Weltalls durchdringen

Michelson-Morley-Experiment (1881):

Geschwindigkeit von Erde und Sonne relativ zum Lichtäther?

Relativbewegung hätte Einfluß auf die Lichtgeschwindigkeit

Orginalgeteuer Nachbau

Quelle: Boson - CC BY-SA 2.5, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=18998921

Überlagerung der Laserstrahlen erzeugt Interfernzmuster

Drehung des Interferometers (gegen den Lichtäther) sollte

das Interferenzmuster ändern:

Lichtlaufzeit in Bewegungsrichtung der Erde und senkrecht

dazu sollten sich unterscheiden *(wenn Lichtäther existiert).*

Analogie: Boot mit Eigengeschwindigkeit c schwimmt in Fluss mit

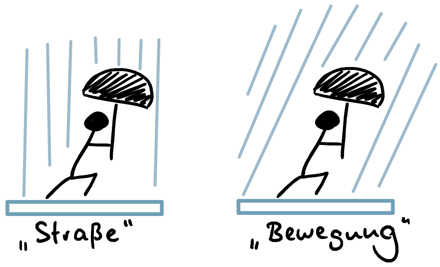
Fließgeschwindigkeit v, mit der Strömung oder senkrecht dazu

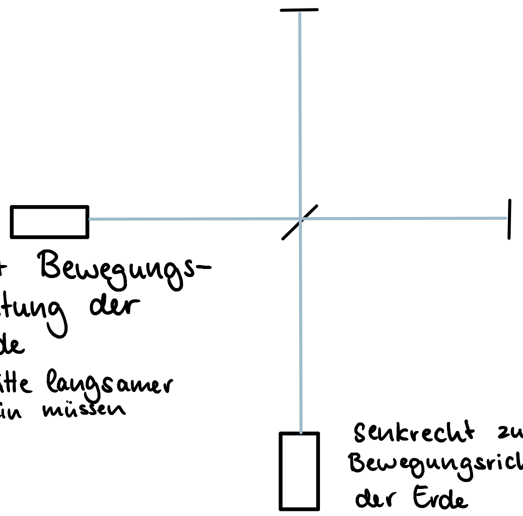
Michelson-Morley-Experiment

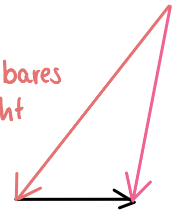
Ätherhypothese

Wasserwellen & Schallwellen haben ein Medium zur Ausbreitung

→ Lichtäther ?

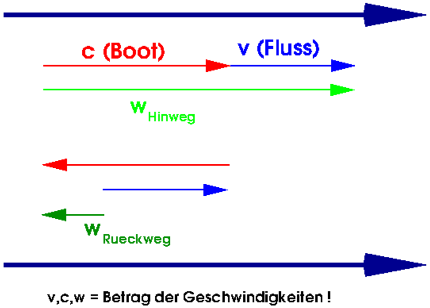






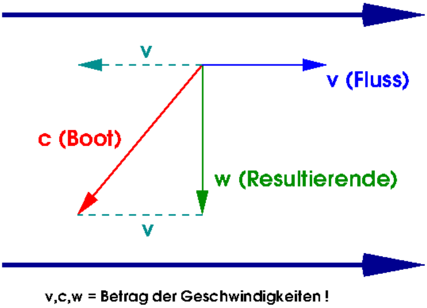
⇒ kein Lichtäther

Laufzeiten für Strecke 2L



Hinweg: $w_H = c + v$ Rückweg: $w_R = c - v$

$$t = \frac{L}{c+v} + \frac{L}{c-v} = \frac{2Lc}{c^2 - v^2}$$



Boot muss Querströmung ausgleichen. Beide Wege: $w = \sqrt{c^2 - v^2}$

$$\bar{t} = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

$$t = \frac{2Lc}{c^2 - v^2} \neq \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \bar{t}$$

$\Rightarrow$ Laufzeiten im Lichtäther sollten unterschiedlich sein

Ergebnis des Michelson-Morley-Experiments:

Drehung des Interferometers lässt Interferenzmuster **unverändert**

Einstein: Ätherhypothese überflüssig !

Spezielle Relativitätstheorie (SRT) auf Basis zweier Postulate:

Konstanz der Lichtgeschwindigkeit und Relativitätsprinzip

Teil 2:

Postulate der SRT

Relativitätsprinzip: Es gibt kein bevorzugtes Bezugssystem.

Naturgesetze haben für alle Beobachter dieselbe Form.

Bewegungen von Körpern nur relativ zu anderen Körpern

Kein absolutes Bezugssystem also auch keinen Lichtäther

Inertialsystem = Bezugssystem in dem das Trägheitsgesetz gilt

Kräftefreie Körper sind in Ruhe oder in geradliniger Bewegung

Drehende oder beschleunigte Systeme sind keine Inertialsysteme!

Lichtgeschwindigkeit im Vakuum:

$$c = 299.792.458 \frac{m}{s} \approx 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \quad < \infty$$

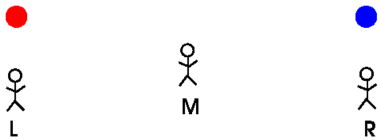
Konstanz der Lichtgeschwindigkeit hat Konsequenzen!

Nach einschalten einer Lampe ist das Licht **nicht** sofort da!

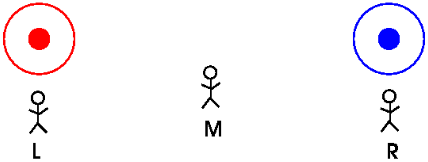
Kleine Entfernungen im Alltag $\Rightarrow$ Zeitunterschied unbedeutend

Auf großen Skalen wird der Effekt deutlich:

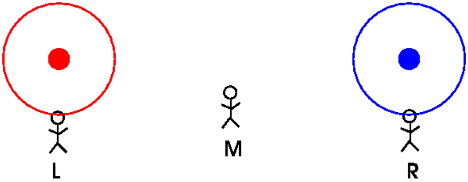
Das Licht der Sonne braucht z.B. etwa 8 Minuten bis zur Erde.



Lichtsignale starten im roten und blauen Punkt (z.B. Supernovae).

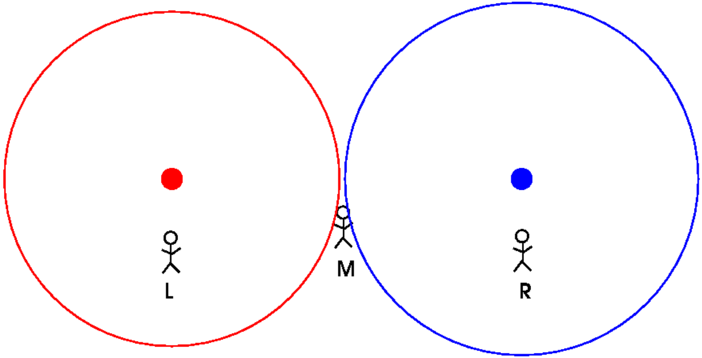


Lichtsignale haben noch keinen Beobachter erreicht.

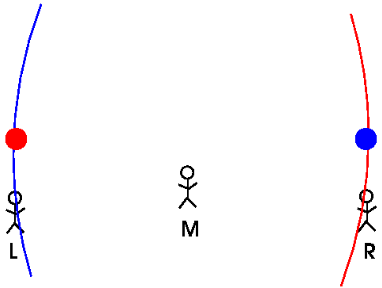


Beobachter L sieht die rote Quelle aufleuchten, R die blaue Quelle.

Beobachter M sieht noch nichts



Beobachter M sieht beide Quellen gleichzeitig aufleuchten !



Beobachter L sieht jetzt auch Blau aufleuchten,

Beobachter R sieht Rot aufleuchten

Wie nehmen die Beobachter die Ereignisse wahr?

Beobachter L: "Erst Rot dann Blau"

Beobachter M: "Rot und Blau gleichzeitig"

Beobachter R: "Erst Blau dann Rot"

Die Beobachter sind sich über die Reihenfolge **nicht** einig!

Zwei örtlich getrennte Ereignisse erfolgen in einem Inertialsystem gleichzeitig, wenn zur Zeit der Ereignisse ausgesendete Lichtsignale sich in der Mitte der Verbindungslinie der Ereignisse treffen.

Die Definition der Gleichzeitigkeit in einem Inertialsystem wird genutzt um Uhren zu synchronisieren:

In der Mitte zwischen den Uhren wird ein Lichtsignal ausgesendet. Die Uhren starten beim Empfangen des Signals.

Gedankenexperiment Teil 1:

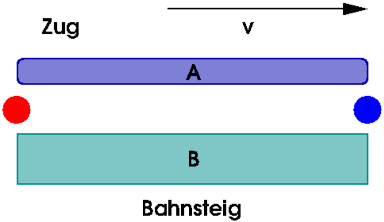
Ein Zug steht neben einem gleichlangen Bahnsteig. An Anfang und Ende werden durch synchonisierte Uhren Lichtsignale gleichzeitig ausgelöst.

Ein Beobachter in der Mitte des Bahnsteigs sieht die Signale gleichzeitig !

Teil 3:

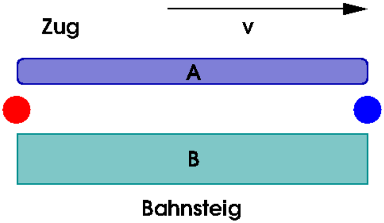
Inertialsysteme in Bewegung

Teil 2: Zug hat Relativgeschwindigkeit v zum Bahnsteig.



Anfang und Ende des Zuges lösen bei Erreichen der dargestellten Position Lichtsignale aus.

Teil 2: Zug hat Relativgeschwindigkeit v zum Bahnsteig.

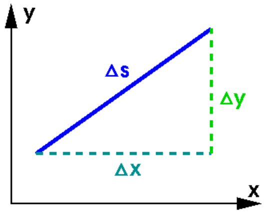


B: "Signale gleichzeitig" $\Rightarrow$ Zug und Bahnsteig gleichlang !

A: "Erst Blau dann Rot" $\Rightarrow$ Bahnsteig **kürzer** als Zug !

Beide Inertialsysteme sind gleichberechtig, $c = konstant$.

Wie misst man Abstände (und damit Längen)?



Im $\mathbb{R}^2$ ist $\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$ und damit $\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$

Ein 2-dimensionaler **flacher** Raum wird beschrieben durch:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

Analog wird der $\mathbb{R}^3$ charakterisiert durch die **Metrik**

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{1}$$

Das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$ zweier Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ ist:

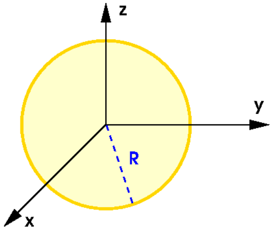
$$\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle_{\mathbb{R}^3} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Länge von $\Delta\vec{s} = (\Delta x \mid \Delta y \mid \Delta z)^\top$:

$$\Delta s := |\Delta\vec{s}|_{\mathbb{R}^3} = \sqrt{\langle \Delta\vec{s}, \Delta\vec{s} \rangle_{\mathbb{R}^3}} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

Analog: $\langle d\vec{s}, d\vec{s} \rangle_{\mathbb{R}^3} = dx^2 + dy^2 + dz^2 \overset{(1)}{=} ds^2$

Lichtquelle im Ursprung:



Für alle $P\,(\Delta x \mid \Delta y \mid \Delta z)$ auf der Oberfläche der Lichtkugel gilt:

$$R^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

Wegen $R = c\Delta t$ folgt: $c^2 \Delta t^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$

Die Ausbreitung von Licht wird also beschrieben durch $\Delta s^2 = 0$:

$$0 = \underbrace{c^2\Delta t^2 - \left(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2\right)}_{:=\Delta s^2}$$

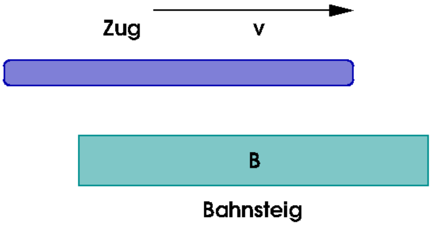
Die Metrik der Raum-Zeit in der SRT ist die Minkowski-Metrik:

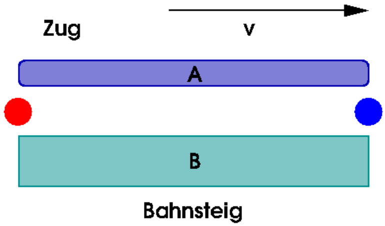
$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

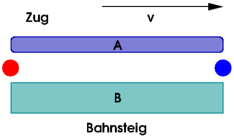
Ereignisse mit $ds^2 = 0$ auf dem Rand der Lichtkugel (lichtartig)
Ereignisse mit $ds^2 > 0$ innerhalb der Lichtkugel (zeitartig).
Ereignisse mit $ds^2 < 0$ außerhalb der Lichtkugel (raumartig).

4-dim. Raumzeitabstand in allen Inertialsystemen gleich!

Zurück zum Gedankenexperiment Teil 2







B: "Signale gleichzeitig, Bahnsteiglänge L_B"

$$\Delta t_B = 0\,,\ \Delta x_B = L_B\,,\ \Delta y_B = \Delta z_B = 0 \ \Rightarrow\ \Delta s^2 = -L_B^2$$

A: "Signale haben Zeitunterschied $T_A > 0$, Zuglänge L_A"

$$\Delta t_A = T_A\,,\ \Delta x_A = L_A\,,\ \Delta y_A = \Delta z_A = 0 \Rightarrow\ \Delta s^2 = c^2 T_A^2 - L_A^2$$

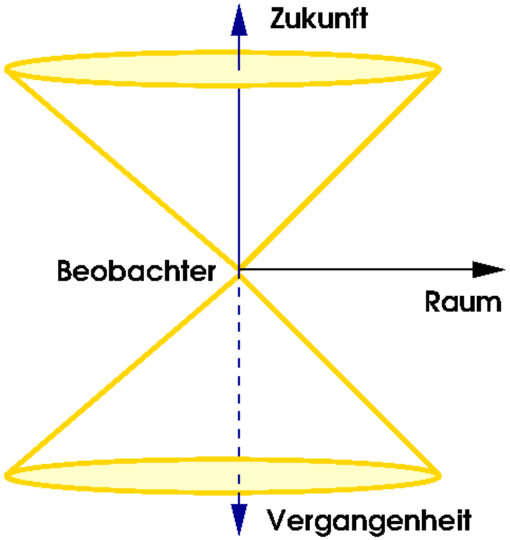
Δs^2 **in allen Inertialsystemen gleich!** $L_B^2 = L_A^2 - c^2 T_A^2 < L_A^2$

A sagt: "Bahnsteig **kürzer** als Zug !"

Teil 4:

Kausalität

Lichtkegel



$\vec{a} \in \mathbb{M}^4 \to$ Koordinaten (a_t, a_x, a_y, a_z), $\vec{b}$ analog.

$$\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle_{\mathbb{M}^4} = c^2 a_t b_t - a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z$$

Bsp 1: $P\,(1s\,,\ 1m\,,\ 2m\,,\ 0)$ und $Q\,(3s\,,\ 5m\,,\ 9m\,,\ 500km)$

$$\begin{aligned}\left\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ} \right\rangle_{\mathbb{M}^4} &= c^2\,(2s)^2 - (4m)^2 - (7m)^2 - (500km)^2 \\ &= \left(3 \cdot 10^5 \frac{km}{s}\right)^2 \cdot 4s^2 - \ldots \gtrsim 10^{11}\,km^2 > 0\end{aligned}$$

Ereignisse P und Q zeitartig zu einander !

Q innerhalb des Lichtkegels von P.

$\vec{a} \in \mathbb{M}^4 \rightarrow$ Koordinaten (a_t, a_x, a_y, a_z), $\vec{b}$ analog.

$$\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle_{\mathbb{M}^4} = c^2 a_t b_t - a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z$$

Bsp 2: $P\,(2\,\text{min}, 0, 0, 0)$ und $Q\,(9\,\text{min},\ 0, 0,\ 1\text{AE})$

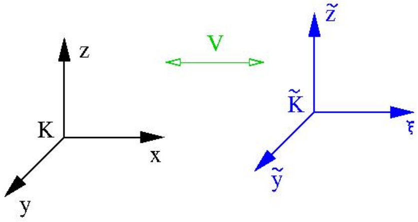
$$\begin{aligned}\left\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ} \right\rangle_{\mathbb{M}^4} &= \left(3 \cdot 10^5 \frac{km}{s}\right)^2 (7 \cdot 60s)^2 - \left(150 \cdot 10^6 km\right)^2 \\ &= -6,624 \cdot 10^{15} < 0\end{aligned}$$

P und Q raumartig zu einander, Q außerhalb des Lichtkegels von P.

Q 1,5 Minuten später $\rightarrow$ P und Q wären wieder zeitartig.

Teil 5:

Lorentztransformation



Koordinatensysteme $K : \{t, x, y, z\}$ und $\widetilde{K} : \{\tau, \xi, \widetilde{y}, \widetilde{z}\}$

Relativgeschwindigkeit V in $x-$Richtung, Achsen x und ξ parallel

Lorentztransformation lässt 4-dim Raumzeitabstand unverändert:

$$t = \frac{\tau + \frac{V}{c^2} \cdot \xi}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}\,, \quad x = \frac{\tau V + \xi}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}\,, \quad y = \widetilde{y}\,, \quad z = \widetilde{z}$$

Raumzeitabstand in K:

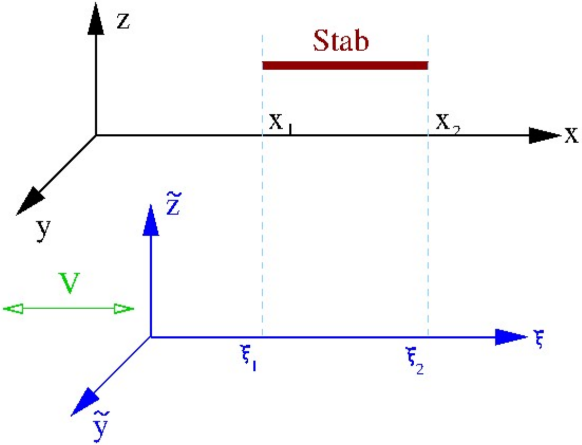
$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

Lorentztransformation

$$\Delta t = \frac{\Delta\tau + \frac{V}{c^2} \cdot \Delta\xi}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad \Delta x = \frac{\Delta\tau V + \Delta\xi}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad \Delta y = \Delta\widetilde{y}, \quad \Delta z = \Delta\widetilde{z}$$

in Δs^2 einsetzen ergibt Raumzeitabstand in $\widetilde{K}$:

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta\tau^2 - \Delta\xi^2 - \Delta\widetilde{y}^2 - \Delta\widetilde{z}^2$$



Angenommen K sei das Ruhesystem des Stabs der Eigenlänge L_0.

Lorentztransformation

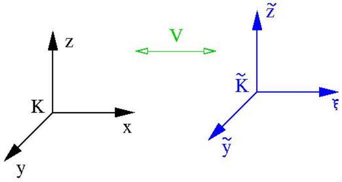
$$t = \frac{\tau + \frac{V}{c^2} \cdot \xi}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}\,, \quad x = \frac{\tau V + \xi}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}\,, \quad y = \widetilde{y}\,, \quad z = \widetilde{z}$$

Für die Länge $\Delta x = L_0$ des Stabs im Ruhesystem K gilt:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{\tau V + \xi_2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - \frac{\tau V + \xi_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{\xi_2 - \xi_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{\Delta \xi}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Mit $\Delta \xi = \widetilde{L}$ erhält man im Koordinatensystem $\widetilde{K}$:

$$\widetilde{L} = L_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$



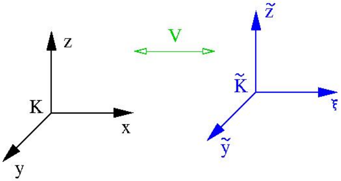
Eine in $\widetilde{K}$ ruhende Uhr bewegt sich relativ zu K in $x-$Richtung

In $\widetilde{K}$ ist $\Delta\xi = \Delta\widetilde{y} = \Delta\widetilde{z} = 0$ also $\Delta s^2 = c^2\Delta\tau^2$

In K ist $\Delta y = \Delta z = 0$ also $\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2$

Raumzeitabstand Δs^2 invariant $\Rightarrow c^2\Delta\tau^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2$

$$\Delta\tau = \Delta t \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{\Delta t^2}} = \Delta t \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$



Geschwindigkeitsaddition **parallel** zur Relativbewegung der Systeme

Betrachte die Komponenten $v_x = \dfrac{dx}{dt}$ und $\widetilde{v}_x = \dfrac{d\xi}{d\tau}$

Aus der Lorentztransformation folgt für die Differentiale:

$$dt = \frac{d\tau + \frac{V}{c^2} d\xi}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \,, \quad dx = \frac{V d\tau + d\xi}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \,, \quad dy = d\widetilde{y} \,, \quad dz = d\widetilde{z}$$

Sind die zu addierenden **parallelen** Geschwindigkeiten v_1 und v_2

ergibt sich mit $v_1 = V$ und $v_2 = \widetilde{v}_x$ aus

$$v_x = \frac{V + \widetilde{v}_x}{1 + \frac{V}{c^2} \cdot \widetilde{v}_x}$$

für die relativistische Summe $v_{\mathrm{sum}} = v_x$:

$$v_{\mathrm{sum}} = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}$$

Im Grenzfall $v_1 \ll c$ und $v_2 \ll c$ ist $1 + \frac{v_1 v_2}{c^2} \approx 1$

$\rightarrow$ Klassische Addition bei **kleinen** Geschwindigkeiten!

Beispiel 1: Sei $v_1 = 0,5c$ und $v_2 = 0,8c$ (parallel)

Klassische Addition $0,5c + 0,8c = 1,3c > c$ unmöglich

Relativistische Addition:

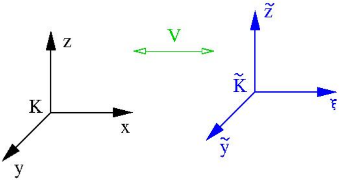
$$v_{\text{sum}} = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} = \frac{0,5c + 0,8c}{1 + \frac{0,5c \cdot 0,8c}{c^2}} = \frac{1,3c}{1,4} \approx 0,93c$$

Beispiel 2: Sei $v_1 = v_2 = c$ (parallel)

Relativistische Addition:

Lichtgeschwindigkeit ist obere Grenze!

$$v_{\text{sum}} = \frac{c + c}{1 + \frac{c^2}{c^2}} = \frac{2c}{2} = c$$



Sei $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)^\top$ und $\vec{\tilde{v}} = (\tilde{v}_\chi, \tilde{v}_\xi, \tilde{v}_\zeta)^\top$ dann folgt analog:

$$\vec{v} = \frac{1}{1 + \frac{V}{c^2} \cdot \tilde{v}_x} \begin{pmatrix} V + \tilde{v}_x \\ \tilde{v}_y \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \\ \tilde{v}_z \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \end{pmatrix}$$

Bsp.

$0{,}5c$ und $0{,}5c$

klassisch:

$0{,}5 + 0{,}5 = c$

relativistisch:

$$\frac{0{,}5c + 0{,}5}{1 + \frac{0{,}5c + 0{,}5c}{c^2}} = 0{,}8c$$

Unterschied von $0{,}2c$
20% der Lichtgeschwindigkeit
oder 200 mio. $\frac{km}{h}$

$0{,}1c$ und $0{,}1c$

$0{,}1c + 0{,}1c = 0{,}2c$

$$\frac{0{,}1c + 0{,}1}{1 + \frac{0{,}1c + 0{,}1c}{c^2}} = 0{,}198c$$

Unterschied von $0{,}01c$

Übereinstimmung von 99%

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - 0{,}01}}$$

$$= \frac{m_0}{\sqrt{0{,}99}} \approx 1{,}005\, m_0$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - 0{,}9^2}} \approx 2{,}3\, m_0$$

myonenzerfall

Instabile Teilchen weisen eine geschwindigkeitsabhängige Lebensdauer auf

-> Zeitdilatation & Längen- bzw. Lorentzkontraktion

$s \cdot t = v$

$T_H = 1{,}5\ \mu s = 1{,}5 \cdot 10^{-6}\ s$

$v = 99{,}5\%$ von $c \sim 3 \cdot 10^{8} \frac{m}{s}$

$H_{Berg} = 1.900\ m$

messen nach 1 h 568 Myonen gemessen

$f = 568 \cdot e^{-\frac{ln}{T_H} t}$

$6^{-7}\ \mu s$

$s = v \cdot t$

$$\Delta t = \frac{2000m}{0{,}95 \cdot 9 \cdot 10^{8} \frac{m}{s}} = \frac{2}{3{,}045} \cdot 10^{-5}\ s \sim 7 \mu s$$

$$\frac{1900m}{0{,}995 \cdot 9 \cdot 10^{8} \frac{m}{s}} =$$

$$N = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1{,}5\mu s}}$$

$$N_{unten} = 568 \cdot 0{,}5^{\frac{7}{1{,}5}} \approx 22 \text{ Teilchen}$$

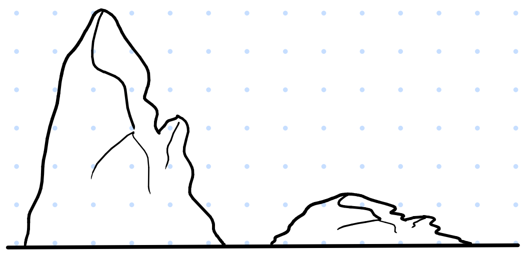
=> Es wurden aber 412 Zerfälle gezählt
- kein Messfehler

durch Zeitdilatation

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \approx 0{,}1$$

$$7 \cdot 0{,}31 = 0{,}7$$

$$568 \cdot 0{,}5^{\frac{0{,}7}{1{,}5}} \approx 411$$



Bezugssystem Erde (Zeitdilatation) | Bezugssystem Myon (Längenkontraktion)

Strecke für Myonen

0,2 km

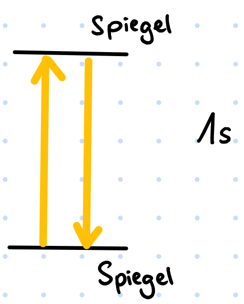
Masse für Myonen

ruhemasse:

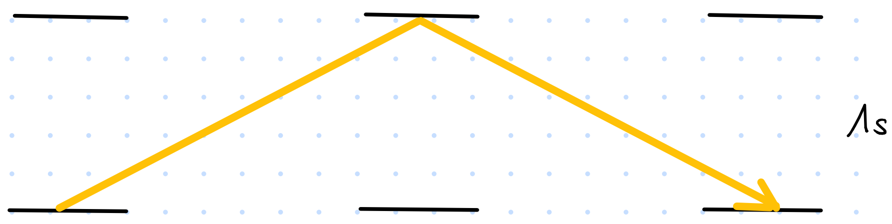
das zehnfache

Lichtuhr

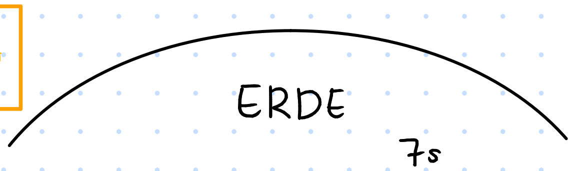
$v = 0$

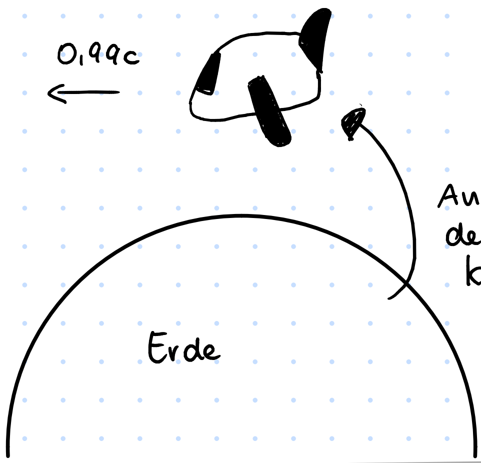


$v = 0{,}99c$

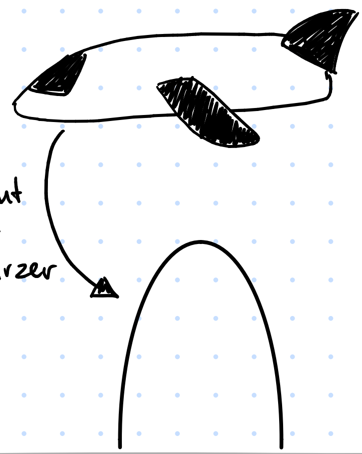


$$\boxed{t = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$





Aus Sicht der Erde kürzer



Aus Sicht des Raumschiffs kürzer

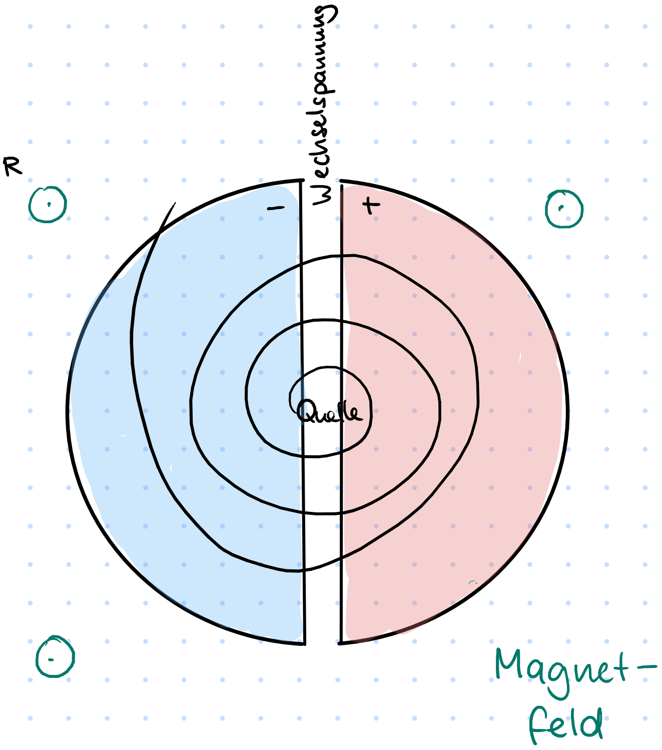
$$E = \frac{m \cdot c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

bei $v = 0$ $\quad E = \frac{m \cdot c^2}{\sqrt{1}} = m \cdot c^2$

bei $v \to c$ $\quad E = \frac{m \cdot c^2}{\sqrt{1-1}} = \infty$ $\rightarrow$ unendlich viel Energie nötig

ZYKLOTRON

TEILCHENBESCHLEUNIGER



Die Zyklotronfrequenz f ist
- unabhängig von U
- proportional zu B